



Escuela de Ingeniería Civil

PANDEO EN EL CAMPO REAL DE BARRAS DE ACERO

NUEVA NORMA AMERICANA AISC-LRFD DE LA CONSTRUCCION METALICA Y SU COMPARACION CON LA EUROPEA

Ing. OMAR MIÑO

**Profesor titular de Construcciones Metálicas I, de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario.
Ex profesor Asociado de Estructuras Metálicas y de Madera de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Buenos Aires (U.B.A).**

Diciembre de 2,008

**PANDEO POR TORSION,
PANDEO POR FLEXION
Y TORSION, EN BARRAS
ARMADAS - MODULOS**

**NUEVA NORMA AMERICANA AISC-LRFD Y SU
COMPARACION CON LA NUEVA NORMA EUROPEA
DE LA CONSTRUCCION METALICA.**

Diciembre de 2,008

A B R E V I A T U R A S

AASHO	American Association of Highway Officials.
AISC	American Institute of Steel Construction.
AISI	American Iron and Steel Institute.
ANSI	American National Standards Institute.
AREA	American Railway Engineering Association.
ASCE	American Society of Civil Engineers.
ASTM	American Society for Testin and Materials.
CRC	Column Research Council. (Consejo de Investigaciones de Columnas).
NBC	National Building Code.
NBS	National Bureau of Standards.
AISCM	AISC Manual of Steel Construction.
DEP	Diseño por Esfuerzos Permisibles.
FS	Factor de Seguridad.
FC	Factor de Carga
DFCR	Diseño por Factor de Carga y Resistencia.
DP	Diseño Plástico.
FF	Factor de Forma.
SSRC	Structural Stability Research Council.
AISCS	AISC Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings.
ASD	AISC – Allowable Streets Design. (Tensiones Permisibles de Diseño).
LRFD	Load and Resistance Factor Design. (Diseño por Factor de Carga y Resistencia = DFCR).

E Q U I V A L E N C I A S

$$1 \text{ pulgada} = 2,54 \text{ cm} = 0,0254 \text{ m}$$

$$1 \text{ pulgada cuadrada} = 6,4516 \text{ cm}^2 = 0,00064516 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ pié} = 30,48 \text{ cm} = 0,3048 \text{ m} \approx 30,50 \text{ cm}$$

$$1 \text{ pié cuadrado} = 929 \text{ cm}^2 = 0,0929 \text{ m}^2$$

$$1 \text{ libra-fuerza} = 4,448 \text{ Newtons} = 453,6 \text{ grs.} = 0,4536 \text{ Kg.}$$

$$1 \text{ Newton} = 101,97 \text{ grs.} = 102 \text{ grs.} = 0,102 \text{ Kg.}$$

$$1 \text{ K N (kilo-newton)} = 102.000 \text{ grs.} = 102 \text{ Kg.} = 0,102 \text{ t}$$

$$1 \text{ Kilolibras (klb)} = 1.000 \text{ libras} = 4.448 \text{ Newtons} = 4,448 \text{ Kilonewtons} = 453,6 \text{ Kg.}$$

$$1 \text{ Pascal (Pa)} = \text{Newton} / \text{m}^2 = 0,0102 \text{ grs.} / \text{cm}^2 = 0,0000102 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$1 \text{ Pascal (Pa)} = \text{Newton} / \text{m}^2 = 0,0001 \text{ N} / \text{cm}^2 = 0,000001 \text{ N} / \text{mm}^2$$

$$1 \text{ M Pa (Mega Pascal)} = 1.000.000 \text{ N} / \text{m}^2 = 10,200 \text{ grs.} / \text{cm}^2 = 10,2 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$235 \text{ M Pa} = 235 \text{ N} / \text{mm}^2 = 2.400 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$1 \text{ KSI} = 6,895 \text{ M Pa} = 70,3 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

$$1 \text{ KIP} = 1.000 \text{ libras} = 453,6 \text{ Kg.}$$

$$1 \text{ Kg-fuerza} = 9,807 \text{ Newton}$$

Este documento es publicado por la FCEIA para su consulta externa. El mismo se publica como Reporte de Investigación para divulgación de las tareas científicas que se desarrollan en la FCEIA, Universidad Nacional de Rosario. Los autores conservan los derechos de autoría y copia de la totalidad de su trabajo aquí publicado. Luego de su posterior eventual publicación externa a la FCEIA, los requerimientos deberán dirigirse a los autores respectivos. El contenido de este reporte refleja la visión de los autores, quienes se responsabilizan por los datos presentados, los cuales no necesariamente reflejan la visión de la SeCyT-FCEIA. Tanto la SeCyT-FCEIA como los autores del presente reporte no se responsabilizan por el uso que pudiera hacerse de la información y/o metodologías publicadas. Cualquier sugerencia dirigirla a: rtsecyt@fceia.unr.edu.ar

Resumen: En las barras armadas con diagonales o presillas, sometidas a torsión y flexo-torsión, es necesario conocer el valor de los módulos de alabeo, C_w , y de torsión, J_t . Al presente la disponibilidad de tablas o bibliografía que los brinden es muy limitada más aún en idioma español, la cual es prácticamente inexistente.

Como es necesario saber el valor de estos parámetros para calcular distintas secciones armadas esta investigación se centra en el cálculo de los mismos.

Una vez determinados estos módulos, C_w y J_t , se está en condiciones de resolver, como se indica arriba, problemas de pandeo torsional y flexo-torsional, siguiendo el criterio LRFD (Cálculo por Factores de Carga y Resistencia) – USA - y el europeo – Eurocódigo 3 - en las barras armadas con diagonales o presillas.

Entre ambos criterios se realizan comparaciones, análisis y comentarios.

Abstract: In the built-up sections with components not in contact with each other, connected by lacings or battens, subject to torsional and flexural-torsional efforts, it is necessary to know the value of the warping constant, C_w , and torsional constant, J . The availability of tables or bibliography that content these values is quite little. In Spanish practically does not exist.

As it is necessary to know the value of these parameters to calculate different built-up sections this research makes focus in the calculation of warping constant and torsional constant.

Once specified these constants, C_w and J_t , we are in conditions to solve problems of torsional buckling and flexural-torsional buckling, from the criterion LRFD (Load and Resistance Factor Design) – USA – and the European criterion – Eurocode 3 – in the built-up sections with lacings or battens.

Among both criteria comparisons, analysis and comments are carried out.

I n d i c e

Capítulo I: Determinación de módulos J_t de torsión y C_w de alabeo	Pá
1.- Introducción -----	1
2.- Alma equivalente de las barras armadas, unidas con diagonales – Cálculo del módulo de torsión J para diferentes secciones -----	1
3.- Alma equivalente de las barras armadas, unidas con presillas – Cálculo del módulo de torsión J para diferentes secciones -----	3
4.0 - Módulos de alabeo C_w – Cálculo, para diferentes secciones -----	19
4.1 - Perfiles doble te – Cálculo de las coordenadas sectoriales -----	19
4.2 - Cálculo del módulo de alabeo de dos perfiles doble te -----	21
4.3 – Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales en forma simbólica --	22
5.0 Sección armada con 4 angulares de alas iguales. Coord. sectoriales -----	24
5.1 – Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales -----	25
5.2 – Cálculo del módulo de alabeo -----	25
5.3 - Sección rectangular armada, con 4 perfiles angulares, de alas iguales ----	28
5.4 – Verdaderas coordenadas sectoriales -----	29
5.5 – Cálculo del módulo de alabeo, sección rectangular, 4 angulares de alas iguales -----	30
5.6 – Sección rectangular armada, con 4 perfiles angulares, de alas iguales ---	31
5.7 – Cálculo del módulo de alabeo, sección rectangular (4 angulares de alas iguales -----	32
6.0 – Sección armada, con dos perfiles U (canal), con alas hacia adentro --	33
6.1 – Cálculo del módulo de alabeo, sección armada con dos perfiles U (canal)	34
6.2 – Sección armada con dos perfiles U (canal), con alas hacia afuera -----	34
6.3 – Cálculo del módulo de alabeo, de sección armada con dos perfiles U ----	35
7.0 – Sección armada con dos perfiles angulares, espalda con espalda, de alas iguales unidas con presillas, cálculo del módulo de alabeo	36

8.0 – Sección armada, con dos perfiles angulares de alas iguales, en cruz, unidos con presillas, cálculo de coord. sectoriales y módulo de alabeo -----	38
9.0 - Dos perfiles doble te, uno grey y otro normal, unidos con diagonales -----	41
9.1 - Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales, perfil grey-----	41
9.2 - Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales, perfil normal -----	42
9.3 - Cálculo de la distancia X_M , entre baricentro y centro de torsión -----	43
9.4 - Cálculo del módulo de alabeo, del perfil doble te grey -----	43
9.5 - Cálculo del módulo de alabeo, del perfil doble te normal -----	44
10.0 - Sección armada con dos angulares de alas iguales, unidos por las puntas, cálculo del módulo de alabeo -----	45

Capítulo II: Pandeo por torsión, en barras armadas.

2.- Introducción -----	49
2.1- Análisis del fenómeno -----	49
2.2- Ecuación diferencial reducida -----	51
2.3- Condiciones de borde – Tensiones críticas -----	51
2.4- Ecuación diferencial general -----	52
2.5- Condiciones de borde – Tensiones críticas -----	52
2.7- Norma americana -----	55
2.8- Nueva norma americana AISC-LRFD -----	56
2.9- Norma europea -----	56
2.10 - Nueva norma europea -----	58

Capítulo III: Pandeo por flexotorsión, en barras armadas.

1.- Introducción -----	59
2.- Análisis del fenómeno -----	61
3.- Ecuación diferencial de pandeo por flexotorsión -----	62

4.- Criterio americano - Ecuación algebraica de 2º grado en función de tensiones, para secciones de simple simetría armadas -----	63
4.1- Ecuación algebraica de 2º grado, en función de los radios de giro, en secciones armadas de simple simetría -----	66
4.2- Ecuación algebraica de 2º grado en función de las esbelteces, en barras armadas ---	67
5.- Secciones que no tienen ningun eje de simetría. Ecuación algebraica de 3º grado, en función de las tensiones, para secciones armadas, uno de los ejes principales corta a los perfiles, y el otro no corta -----	68
5.1- Ecuación algebraica de tercer grado, en función de los radios de giro, para secciones armadas que no tienen ninguna simetría, uno de los ejes principales corta a los perfiles, y el otro no corta -----	70
5.2- Ecuación algebraica de tercer grado, en función de las esbelteces, para barras armadas, que no tienen ninguna simetría, uno de los ejes principales corta a los perfiles, y el otro no corta -----	70
5.3- Ecuación algebraica de 3º grado, en función de las tensiones, para secciones armadas, que no tienen ninguna simetría, ninguno de los dos ejes principales, corta a los perfiles -----	71
5.4- Ecuación algebraica de 3º grado, en función de los radios de giro, para barras armadas, que no tienen ninguna simetría, ninguno de los ejes principales, corta a los perfiles -----	73
5.5- Ecuación algebraica de 3º grado, en función de las esbelteces, para barras armadas, que no tienen ninguna simetría, ninguno de los ejes principales corta a los perfiles -----	73
6.- Nueva norma americana – Criterio AISC - LRFD -----	74
7.- Criterio europeo – Secciones de simple simetría, en barras armadas -----	74
7.1- Secciones armadas, que no tienen ningun eje de simetría -----	76
7.2- Nueva norma europea – Secciones armadas, con doble y simple simetría -----	76
7.3- Secciones armadas, que no tienen ningun eje de simetría -----	76

Aplicaciones practicas

Capítulo I: Determinación de módulos J_t de torsión y C_w de alabeo

1.-Introducción. Las barras armadas unidas con diagonales y presillas, que en la mayoría de los casos son de doble simetría y cargadas centradamente, además del pandeo por flexión, pueden tener pandeo por torsión en toda su longitud, y generalmente al igual que en secciones de alma llena, la crítica por torsión es mayor que la de la flexión, predominando casi siempre ésta. Pero existen casos en que debido a espesores de los componentes de la sección menores que lo normal, puede existir un predominio de la crítica de torsión.

En los casos de barras de alma llena, las constantes que se usan en las ecuaciones para calcular las carga crítica, C_w (módulo de alabeo) y J_t (módulo de torsión), en las secciones frecuentes están tabulados, y cuando no se encuentran en tablas, se las calcula mediante la teoría de las coordenadas sectoriales.

Pero en los casos de barras armadas, no lo están, y se debe aplicar convenientemente la teoría de coordenadas sectoriales, para calcular C_w , como también calcular correctamente el valor J_t , en este tipo de secciones armadas. Se deben transformar las diagonales o presillas, en una chapa continua, en toda su longitud, de un determinado espesor, que se comporte de la misma manera que las originales, es decir una chapa efectiva, siendo esto diferente para cada caso en particular. Estas chapas que reemplazan a diagonales y presillas, absorben nada más que esfuerzos de corte, igual que sus originales, y representan el alma equivalente, convirtiéndose en un marco cerrado, al cual se lo debe tratar convenientemente.

2.- Alma equivalente de las barras armadas, unidas con diagonales. Representando idealmente un reticulado tipo Warren (figura 1).

A las secciones de los cordones las llamamos A_t y A_t , a la de las diagonales A_d y a la de los montantes A_m , pero en este caso no están solicitados por ningún esfuerzo. La distancia entre montantes es a , y la longitud de las diagonales es d . El esfuerzo cortante tiene poca variación, y se lo denomina V .

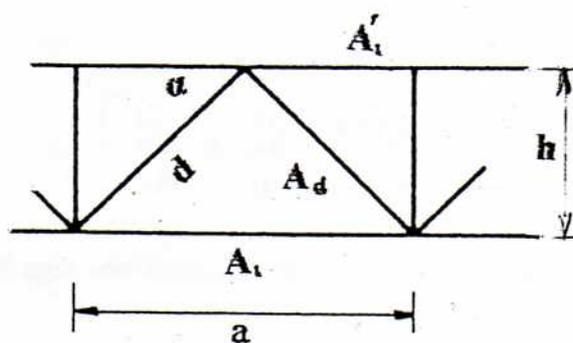


Figura 1

Se reemplazan las diagonales por una chapa continua, que tiene una sección equivalente A_e , y aplicando el teorema de Castigliano: igualando las energías de deformación, provocadas por el esfuerzo de corte en un tramo a de la viga real, a otro tramo con igual longitud de la viga equivalente, se obtiene para la viga

equivalente una energía W_e

$$W_e = \frac{V^2 (a/2)}{2 G A_e} \quad (1)$$

En la viga real reticulada, el esfuerzo en la diagonal es $+V / \text{sen } \alpha$, y la energía por esfuerzo de corte será:

$$W_e = \frac{V^2}{2 E A_d \text{sen}^2 \alpha} \cdot \frac{(a/2)}{\cos \alpha} \quad (2)$$

igualando las dos energías queda:

$$\frac{I}{A_e} = \frac{G}{E A_d \sin^2 \alpha \cos \alpha} = \frac{G}{E} \cdot \frac{I}{h^2 a} \cdot \frac{2 d^3}{A_d} \quad (3) \quad \text{siendo } G/E = 0,385, \text{ la ecuación queda:}$$

y finalmente viene una ecuación en la cual la única incógnita es A_e :

$$\frac{I}{A_e} = \frac{0,385}{h^2 a} \cdot \frac{2 d^3}{A_d} \quad (4) \quad \therefore \quad A_e = \frac{h^2 a}{0,385} \cdot \frac{A_d}{2 d^3} \quad (5)$$

siendo $A_e = h e$ e = espesor de la chapa ficticia

de la misma manera, se obtiene para una viga Warren disimétrica (figura 2), la sección equivalente A_e :

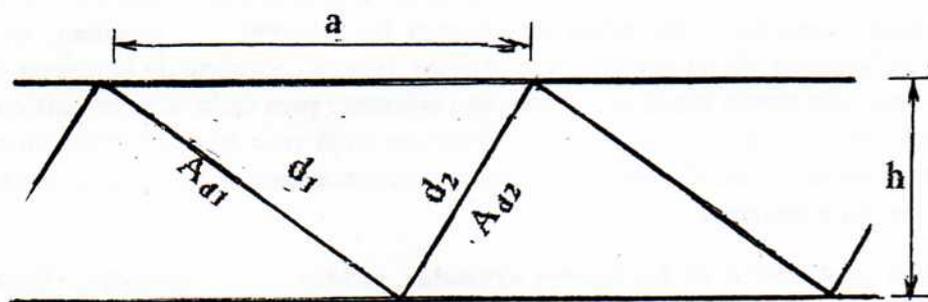


Figura 2

$$\frac{I}{A_e} = \frac{0,385}{a h^2} \left[\frac{d_1^3}{A_{d1}} + \frac{d_2^3}{A_{d2}} \right] \quad (6) \quad \therefore \quad A_e = \frac{a h^2}{0,385} \cdot \frac{A_{d1} \cdot A_{d2}}{A_{d2} d_1^3 + A_{d1} d_2^3} \quad (7)$$

Por igual camino, se obtiene A_e para una viga Warren simétrica (figura 3):

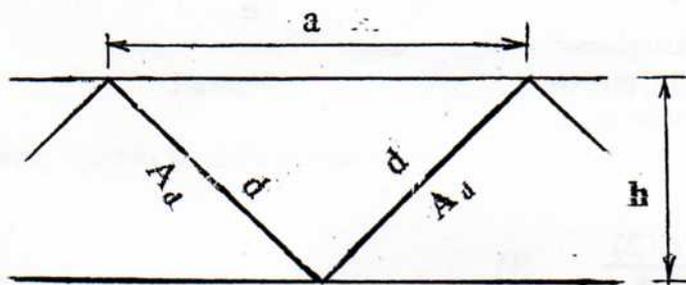


Figura 3

$$\frac{I}{A_e} = \frac{0,385}{a h^2} \cdot \frac{2 d^3}{A_d} \quad (8) \quad \therefore \quad A_e = \frac{a h^2}{0,385} \cdot \frac{A_d}{2 d^3} \quad (9)$$

Con el mismo criterio, puede obtenerse A_e , para una viga Prat:

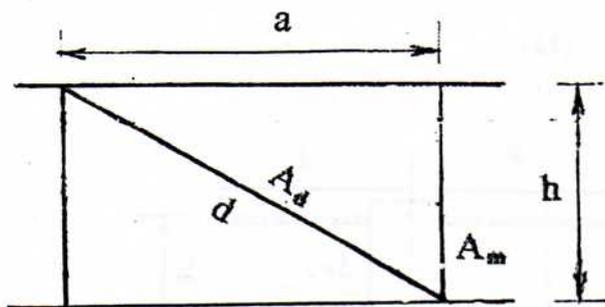


Figura 4

$$\frac{1}{A_e} = \frac{(A_d / A_m) (1 / \text{sen}^2 \alpha)}{2,6 \cdot A_d \cdot \cot \alpha} \quad (10)$$

$$A_e = \frac{2,6 \cdot A_d \cdot \cot \alpha}{(A_d / A_m) (1 / \text{sen}^2 \alpha)} \quad (11)$$

Diagonales y montantes, ó diagonales solamente, fueron reemplazados por una chapa equivalente en toda su longitud, en ambas caras de la sección de una columna armada, pero ésta chapa está solicitada exclusivamente por esfuerzos de corte, y no por esfuerzos de flexión, figura 5.

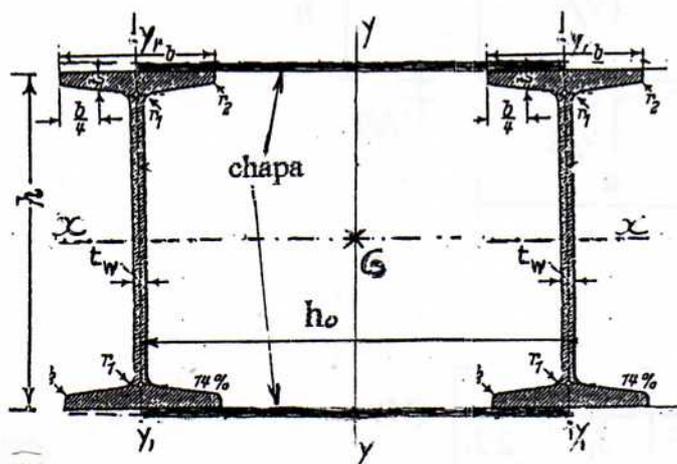


Figura 5

3.- Alma equivalente de las barras armadas, unidas con presillas.-

Para determinar el alma equivalente de estas barras, se establece una igualdad entre la deformación de la barra real solicitada por esfuerzo cortante, y la deformación por el mismo esfuerzo en la barra equivalente.

En figura 6a puede verse una barra unida con presillas, y en la figura 6b la representación esquemática ideal de la misma a través de una viga Vierendel.

Denominando J_1 al momento de inercia de los cordones, que en este caso son iguales, y J_p al momento de inercia de las presillas, y suponiendo que la variación del esfuerzo cortante V es pequeño y se puede tomar su valor medio.

En esta condiciones citadas, los puntos de inflexión se encuentran en los puntos medios de los cordones, y en los puntos medios de las presillas, pudiendose escribir la igualdad:

$$T (h/2) = 2 \frac{V}{2} \cdot \frac{a}{2} \quad (12)$$

$$T = V (a/h) \quad (13)$$

La deformación en B (ó en A), tiene un valor $\delta/2$, y se debe al giro θ , y a la flexión del tra-

mo BB' (ó AA'), siendo θ ; (figura 6b)

$$\theta = \frac{T (h/2)^2}{3 E J_P} = \frac{V a h}{12 E J_P} \quad (14)$$

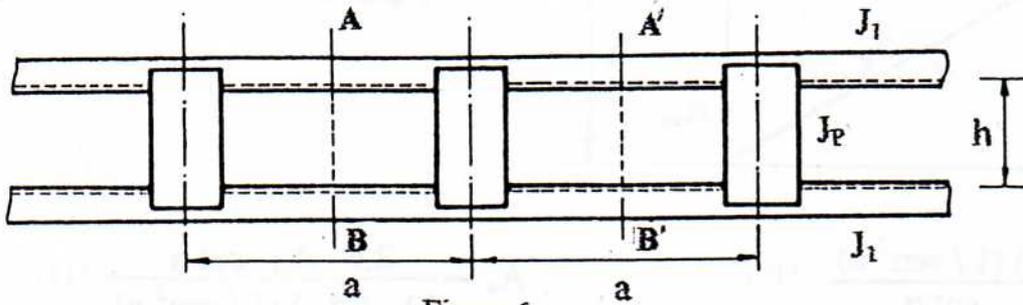


Figura 6a

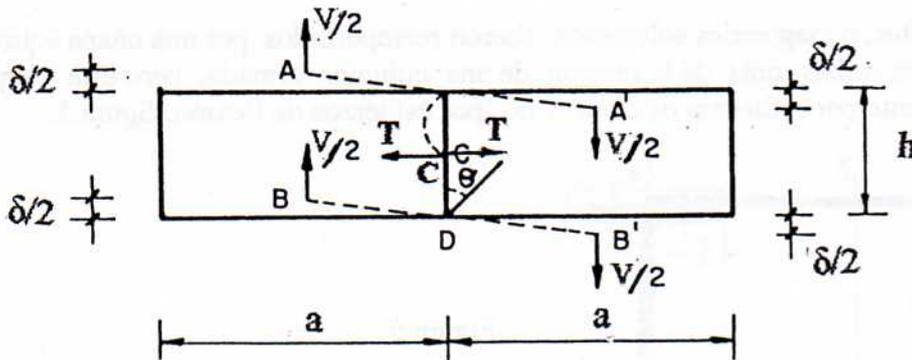


Figura 6b

La deformación (flecha) en B será:

$$\frac{\delta}{2} = \theta \frac{a}{2} + \frac{(V/2) (a/2)^3}{3 E J_1} = \frac{V a}{24 E} \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{2 J_1} \right] \quad (15)$$

Igualando con la deformación del alma en la viga equivalente:

$$\frac{V a}{G A_e} = \frac{V a}{24 E} \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{2 J_1} \right] \quad (16)$$

y en esta ecuación la única incógnita es el valor de A_e :

$$\frac{1}{A_e} = \frac{G}{12 E} \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{2 J_1} \right] \quad (17) \quad \text{Siendo } G/12 E = 0,032, \text{ viene}$$

$$\frac{1}{A_e} = 0,032 \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{2 J_1} \right] \quad (18) \quad A_e = \frac{(2 J_1 J_P)}{0,032 a [a J_P + 2 J_1 h]} \quad (19)$$

Se analizó el caso de cordones iguales, en el caso de cordones con inercias diferentes J_1 y J_2 , un cálculo teórico igual al anterior, daría el valor de A_e :

$$(20) \frac{1}{A_e} = 0,032 \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{(J_1 + J_2)} + \frac{3 a^2 (J_1 - J_2)^2}{a J_P (J_1 + J_2)^2 + 12 h J_1 J_2 (J_1 + J_2)} \right]$$

El tercer sumando del corchete, es muy pequeño y se puede despreciar, quedando:

$$(21) \frac{1}{A_e} = 0,032 \left[\frac{a h}{J_P} + \frac{a^2}{(J_1 + J_2)} \right] \quad (22) A_e = \frac{(J_1 + J_2) J_P}{0,032 [a h (J_1 + J_2) + a^2 J_P]}$$

Entonces cuando J_1 y J_2 no son muy diferentes, se puede tomar su valor medio y despreciar el tercer sumando (lo de despreciar queda a criterio del calculista).

Puede verse que en cualquiera de los casos, la sección queda reducida a un cajón cerrado, figura 5, y de esta forma se pueden determinar los valores de C_w y J_t .

El módulo de alabeo está ligado a torsión no uniforme ó torsión impura, y se debe tener muy presente que las chapas que reemplazan a las diagonales, solamente pueden tomar esfuerzos de corte, o de torsión pura, por lo tanto los perfiles (parantes) que componen la sección, son los únicos que están solicitados a flexión, e intervienen en la determinación de C_w .

En cambio el módulo de torsión está ligado a la torsión pura, la solución exacta es bastante compleja en secciones cajón, siendo mas accesibles la analogía de membrana, que dan soluciones muy cercanas a la realidad. Pero la nanalogía hidrodinámica, ofrece valiosos resultados, casi reales en secciones cajón de paredes finas, donde la tensión varía muy poco a lo largo del espesor de la pared, si se compara con la variación a lo largo de las longitudes de los lados. Se obtienen los siguientes resultados para una sección hueca asimétrica, figura 7:

$$J_t = \frac{32 a^2 b^2}{\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2} + \frac{a}{h_3} + \frac{b}{h_4}} \quad (23) \quad J_t = \frac{M_t}{G \theta} \quad (24)$$

La tensión debida a la torsión τ_i , a lo largo de un lado del cajón, de espesor h_i ($i = 1, 2, 3, 4$) vale

$$\tau_i = \frac{J_t}{8 a \cdot b \cdot h_i} \cdot G \cdot \theta = \frac{M}{8 a \cdot b \cdot h_i} \quad (25)$$

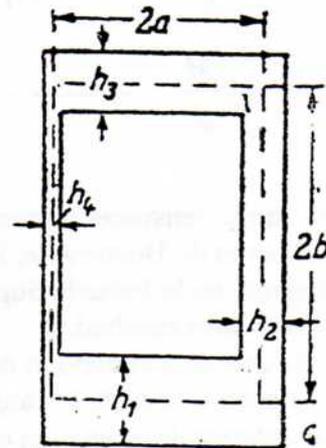


Figura 7

Aquí θ es el ángulo de torsión por centímetro de longitud, G el módulo de elasticidad transversal (kg/cm^2) y M el momento de torsión ($kg \cdot cm$). Estas ecuaciones sencillas, son válidas si las paredes del cajón son delgadas; si son gruesas dan valores demasiado pequeños, cuyo error, para valores de a/h ó $b/h = 10$, pueden ser hasta un 7%.

El barón de Bouteville, daba para secciones de paredes gruesas, la siguiente solución practica aproximada, que introduce una corrección para los valores de J_t y de τ_i , correspondientes a las secciones de pared delgada:

$$(26) J = J_v + \sum_1^4 J_{\varphi i}; \quad \tau_i = \tau_{vi} + \tau_{\varphi i} \quad (27) \quad J_v = \frac{32 a^2 b^2}{4 \sum_1^4 \frac{a_i}{h_i}} \quad (28)$$

a_i es el semilado de espesor h_i , de modo que, en este caso, es $a_1 = a_3 = a$ y $a_2 = a_4 = b$.

$$(29) J_{\varphi i} = h_i^3 \left(0,667 a_i - 0,210 h_i \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi \cdot a_i}{h_i} \right) \quad \text{para} \quad \frac{2 a_i}{h_i} < 1,7$$

$$(30) J_{\varphi i} = h_i^3 (0,667 a_i - 0,210 h_i) \quad \text{para} \quad \frac{2 a_i}{h_i} > 1,7$$

$$(31) \tau_{vi} = \frac{4 ab}{h_i \sum_1^4 \frac{a_i}{h_i}} \cdot \frac{M}{J}$$

$$(32) \tau_{\varphi i} = h_i \left(1 - \frac{0,81}{\operatorname{cfl} \frac{\pi a_i}{h_i}} \right) \frac{M}{J} \quad \text{para} \quad \frac{2 a_i}{h_i} < 3,2$$

$$(33) \tau_{\varphi i} = h_i \frac{M}{J} \quad \text{para} \quad \frac{2 a_i}{h_i} > 3,2$$

Las máximas tensiones cortantes se producen en los puntos medios de los lados, en su borde exterior. El barón de Bouteville, ha aplicado también este procedimiento, a otras secciones huecas, (disertación en la Escuela Superior Técnica de Munich en 1.930), y todavía estas ecuaciones siguen dando buenos resultados.

Actualmente está el método de C. Weber, en el que se tienen en cuenta los ángulos redondeados en el interior de la sección cajón. Otros autores lo presentan, como en fig. 8, y ecuación

$$J_t = \frac{2 h_o^2 b_o^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta^2 - \delta^2} \quad (34)$$

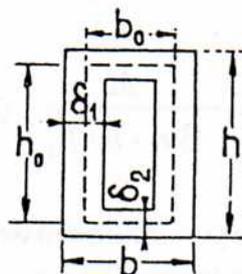


Figura 8

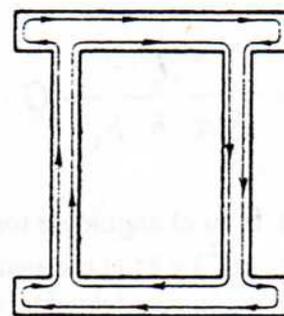


Figura 9

Siendo esta ecuación, no tan general como la anterior. La sección equivalente, queda convertida en un cajón, y tratándose de perfiles doble te o U, queda un cajón con salientes en los cuatro bordes como se ve en figura 9, en la cual pueden verse también el trazado de las líneas de tensión τ . En la parte anular del cajón cerrado las τ_i tienen el mismo sentido en el exterior e interior, mientras que en las partes salientes tienen sentidos contrarios. Por consiguiente, estas partes salientes, contribuyen poco y nada a resistir el momento torsor y tampoco tienen influencia en la determinación del módulo de torsión J_t , no se las tiene en cuenta directamente, se desprecia su valor.

La diferencia en estos casos es que, los espesores de los componentes no son constantes, sobre todo el espesor de la chapa que reemplaza a las diagonales o presillas. Siguiendo la teoría hidrodinámica y teniendo presente la variación de espesores, se llegan a muy buenos resultados al calcular el valor de J_t .

Aplicando el criterio hidrodinámico, se tendrán para los diferentes espesores, el momento torsor $M_{ti} = \text{área}_i \cdot \tau_i$, y el total $M_t = \sum \text{áreas}_i \cdot \tau_i$, además las tensiones guardan una determinada relación con sus espesores: $t_1 \tau_1 = t_2 \tau_2 = t_3 \tau_3 = \dots$, de modo tal que se puede calcular M_t total, en función de una de las tensiones, y con ello J_t .

Recordando que:

$$(35) \tau = \frac{M_t}{W_t} \quad (36) \gamma = \frac{\tau}{G} \cdot \frac{\theta h}{2} \quad (37) \frac{\tau}{G} = \frac{M_t}{W_t G}$$

$$(38) \theta = \frac{M_t}{W_t G \frac{h}{2}} = \frac{M_t}{J_t G} \quad (39) J_t = \frac{W_t h}{2}$$

$$(40) W_t = \sum \text{áreas}$$

Ejemplo: dos perfiles laminados normales doble te, de doble simetría, fabricación europea que componen una sección armada, unidos por diagonales, como se ve en figura 10, con sus datos extraídos de tablas:

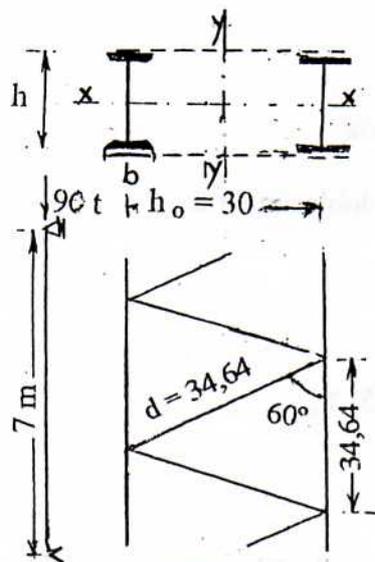


Figura 10

D A T O S : perfil normal doble te 200 mm

$$A = 33,4 \times 2 = 66,8 \text{ cm}^2 \quad A_l = 33,4 \text{ cm}^2 \quad i_x = 8,00 \text{ cm}$$

$$i_y = 1,87 \text{ cm} \quad \sigma_F = 2,55 \text{ t/cm}^2 \quad b = 90 \text{ mm}$$

$$t_w = 7,5 \text{ mm} \quad t = 1,13 \text{ cm} \quad J_x = 2.140 \times 2 = 4.280 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2$$

$$h_o = 30 \text{ cm} \quad J_y = 15.030 \text{ cm}^4$$

angulares alas iguales 30 x 3 mm

$$A_d = 1,74 \text{ cm}^2 \quad 2 A_d = 3,48 \text{ cm}^2$$

Como primera medida, convertir las diagonales en una chapa equivalente continua, aplicando ecuación (9)

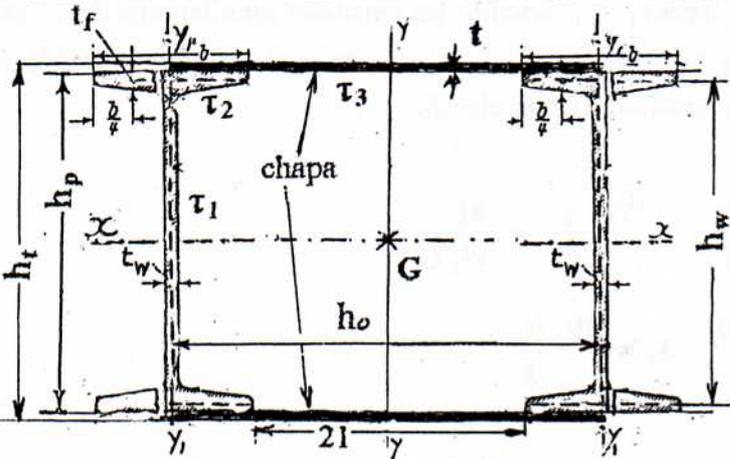
$$A_c = [34,64 \times 30^2 / 0,385] [2 \times 1,74 / 2 \times 34,64^3] = 3,3898 \text{ cm}^2 = 3,39 \text{ cm}^2$$

$$30 t = 3,39 \text{ cm}^2 \quad t = 3,39 / 30 = 0,113 \text{ cm} \quad \text{-----} \quad 0,0565 \text{ cm} \quad \text{cada chapa equivalente}$$

$$h_t = 20 + 0,113 = 20,113 \text{ cm} \quad t_1 = 1,13 + 0,0565 = 1,1865 \text{ cm} \quad (t_1 / 2) = 0,59325 \text{ cm}$$

$(h_w/2) = (20,113 - 1,1865)/2 = 9,463 \text{ cm}$ si se hubiese tomado el perfil, despreciando el espesor de la chapa, vendría: $(h_w/2) = (20 - 1,13)/2 = 9,435 \text{ cm}$ — error 0,3%

Los dos doble te 200 de doble simetría, con la chapa equivalente se muestra en figura 11



$h_o = 30 \text{ cm} \quad h_w = 18,926 \text{ cm}$

$b/2 = 4,50 \text{ cm} \quad t_w = 0,75 \text{ cm}$

$t_f = 1,13 \text{ cm} \quad t = 0,0565 \text{ cm}$

Figura 11

Aplicando la teoría hidrodinámica:

$M_{t1} = 15 \times 18,926 \times 0,75 \times 2 \tau_1 = 425,835 \tau_1$

$M_{t2} = 4,50 \times 9,463 \times 1,1865 \times 4 \tau_2 = 202,100 \tau_2$

$M_{t3} = 10,028 \times 21 \times 0,0565 \times 2 \tau_3 = 23,800 \tau_3$

τ_1 = tensión de corte en el alma de los perfiles doble te de doble simetría.

τ_2 = tensión de corte en las alas mas chapa, de los perfiles doble te de doble simetría.

τ_3 = tensión de corte en las chapas equivalente a las diagonales.

Teniendo presente que: $0,75 \tau_1 = 1,18765 \tau_2 = 0,0565 \tau_3$

Reemplazando τ_2 y τ_3 en función de τ_1 viene: $\tau_2 = (0,75/1,1865) \tau_1$;

y $\tau_3 = (0,75/0,0565) \tau_1$

$M_{t1} = \text{-----} = 425,835 \tau_1$

$M_{t2} = 202,10 (0,75/1,1865) \tau_1 = 127,750 \tau_1$

$M_{t3} = 23,80 (0,75/0,0565) \tau_1 = 315,930 \tau_1$

$\sum M_{ti} = 869,515 \tau_1$

en función de τ_2 queda: $\sum M_{ti} = 1.375,57 \tau_2$

en función de τ_3 queda: $\sum M_{ti} = 65,500 \tau_3$

Con estos datos, se está en condiciones de calcular J_t :

En función de τ_1 , y aplicando ecuación (39) queda:

$$J_t = W_t (h/2) = 869,515 \times 15 = 13.042,725 \text{ cm}^4$$

En función de τ_2 viene: $J_t = 1.375,57 \times 9,463 = 13.017,02 \text{ cm}^4$

En función de τ_3 viene: $J_t = 65,50 \times 10,028 = 656,83 \text{ cm}^4$

Para su cálculo se pueden seguir varios caminos, algunos mas acertados que otros:

1) Calcular el promedio:

$$(1/3) \sum J_{ti} = (1/3) [13.042,725 + 13.017,02 + 656,83] = 8.905,53 \text{ cm}^4$$

2) Calcular de acuerdo a las longitudes de cada espesor:

$$J_t = \frac{13.042,725 \times 18,926 + 13.017,02 \times 9 + 656,83 \times 21}{18,926 + 9,0 + 21,0} = 7.749,65 \text{ cm}^4$$

El error entre ambos resultados es del 14,9 %, siendo mas real este último.

3) Con el mismo criterio anterior, pero con pasaje no tan brusco, entre el espesor del ala del perfil de 1,13 cm y el espesor de la chapa equivalente de 0,0565 cm c/u, con una variación a 45°, como se ve en figura (12), pero para mayor facilidad se lo reemplaza por un diente, cuyo espesor es la mitad del espesor del ala, y longitud de 1,13 cm, obteniéndose:

$$M_{i1} = 15 \times 18,926 \times 0,75 \times 2 \tau_1 = 425,835 \tau_1$$

$$M_{i2} = 3,37 \times 9,463 \times 1,1865 \times 4 \tau_2 = 151,351 \tau_2$$

$$M_{i4} = 1,13 \times 9,7175 \times 0,565 \times 4 \tau_4 = 24,817 \tau_4$$

$$M_{i3} = 10,028 \times 21,0 \times 0,0565 \times 2 \tau_3 = 23,80 \tau_3$$

Teniendo presente la relación entre espesores y tensiones de corte viene en función de τ_1 :

$$M_{i1} = \dots = 425,835 \tau_1$$

$$M_{i2} = 151,35 \times (0,75 / 1,1865) \tau_1 = 95,670 \tau_1$$

$$M_{i4} = 24,817 \times (0,75 / 0,565) \tau_1 = 32,940 \tau_1$$

$$M_{i3} = 23,80 \times (0,75 / 0,0565) \tau_1 = 315,93 \tau_1$$

$$\sum M_{ii} = 870,38 \tau_1$$

En función de τ_2 viene: $\sum M_{ti} = 1.376,94 \tau_2$

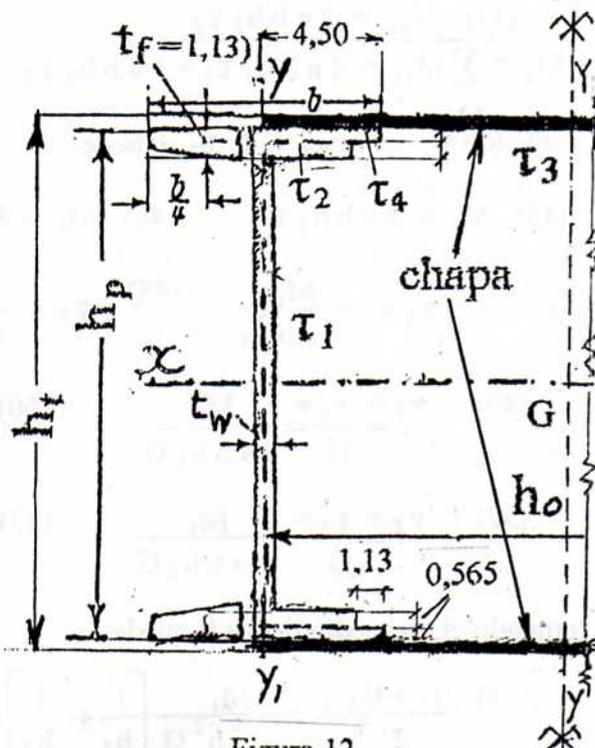


Figura 12

En función de τ_4 viene: $\sum M_{ti} = 655,68 \tau_4$

En función de τ_3 viene: $\sum M_{ti} = 65,57 \tau_3$

Con estos resultados, y aplicando ecuación (39) se puede obtener el valor de J_t , en función de τ :

En función de τ_1 queda: $J_t = 870,38 \times 15 = 13.055,70 \text{ cm}^4$

En función de τ_2 queda: $J_t = 1.376,94 \times 9,463 = 13.029,98 \text{ cm}^4$

En función de τ_4 queda: $J_t = 655,68 \times 9,7175 = 6.371,57 \text{ cm}^4$

En función de τ_3 queda: $J_t = 65,57 \times 10,028 = 657,53 \text{ cm}^4$

Calculando de acuerdo a las longitudes de cada espesor J_t :

$$J_t = \frac{13.055,7 \times 18,926 + 13.029,98 \times 6,74 + 6371,57 \times 1,13 \times 2 + 657,533 \times 21}{18,926 + 6,74 + 2,26 + 21,0} = 7.421,86 \text{ cm}^4$$

El error cometido con el anterior es del 4,4 %, llegando a un valor menor al anterior, y se puede llegar, teniendo en cuenta la variación del espesor, en las alas del perfil, a valores mas pequeños.

Pero J_t no es igual al promedio de los J_{ti} , éste está en función de los θ_i , por este camino se obtiene un valor irreal, el real es menor (15 % menos). Analizando una sección cajón (figura 13), aplicando la teoría hidrodinámica viene:

$$(41) M_{t1} = 4 a b h_1 \tau_1 \quad (42) h_1 \tau_1 = h_2 \tau_2$$

$$(43) M_{t2} = 4 a b h_2 \tau_2$$

$$M_t = \sum M_{ti} = 4 a b h_1 \tau_1 + 4 a b h_2 \tau_2 \quad (44)$$

Poniendo τ_2 en función de τ_1 se tiene:

$$(45) M_t = 8 a b h_1 \tau_1 \quad (46) M_t = 8 a b h_2 \tau_2$$

$$(47) \tau_1 = \frac{M_t}{8 a b h_1} \quad (48) \tau_2 = \frac{M_t}{a b h_2 8}$$

$$(49) \gamma_1 = \frac{\tau_1}{G} = \frac{M_t}{8 a b h_1 G}$$

$$(50) \theta_1 = \frac{\gamma_1}{b} = \frac{M_t}{8 a b^2 h_1 G} \quad 8 a b^2 h_1 = J_{t1} \quad (51)$$

$$(52) \gamma_2 = \frac{\tau_2}{G} = \frac{M_t}{8 a b h_2 G}$$

$$(53) \theta_2 = \frac{\gamma_2}{a} = \frac{M_t}{8 a^2 b h_2 G} \quad 8 a^2 b h_2 = J_{t2} \quad (54)$$

tomando el promedio de los θ queda:

$$(55) \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{M_t}{16 a^2 b^2 G} \left[\frac{1}{\frac{h_1}{a}} + \frac{1}{\frac{h_2}{b}} \right] = \frac{M_t}{16 a^2 b^2 G} \left[\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2} \right] = \frac{M_t}{16 a^2 b^2 G \left[\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2} \right]}$$

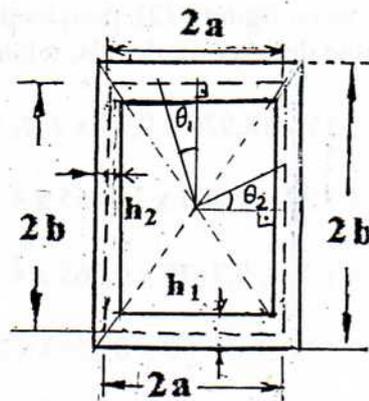


Figura 13

El denominador de la ecuación (55) sin G, constituye el valor de J_t , que se ha visto en ecuación (23), pero en este caso en una sección que tiene dos lados iguales enfrentados.

Viendolo esto de otra manera sería:

$$(56) \quad \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \frac{M_t}{2G} \left[\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right] = \frac{M_t}{G} \frac{2 J_1 J_2}{J_1 + J_2} \quad (57)$$

En el problema de la figura 11, los cordones horizontales tienen espesor variable, se debe buscar un espesor constante equivalente a los dos espesores, y teniendo en cuenta el baricentro de los angulares, que será el baricentro de la chapa que reemplaza a estos y que tiene un espesor de 0,0565 cm (calculado con ecuación 9) en páginas anteriores. El cálculo del espesor es (figura 14):

$$4,50 \times 1,13 \times 2 + 30 \times 0,0565 = 30 t_e \cdot \cdot t_e = \frac{11,865}{30} = 0,3955 \text{ cm}$$

¿cuál es la distancia entre baricentros, de las alas y chapa, con respecto al de la sección total ?

$$h_1 = 0,75 \text{ cm} \quad h_2 = 0,3955 \text{ cm}$$

El baricentro del angular de 30 x 30 x 3 mm es de 0,84 cm

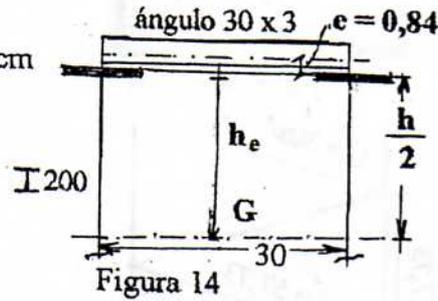


Figura 14

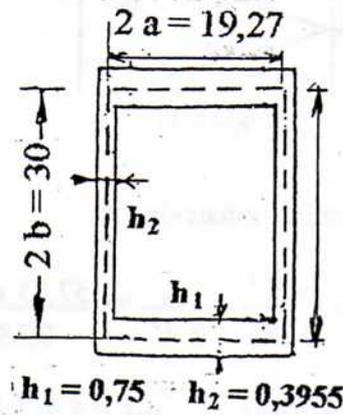
$$h_e = \frac{9,0 \times 1,13 \times 9,435 + 0,0565 \times 30 \times 10,84}{9,0 \times 1,13 + 0,0565 \times 30} = 9,636 \text{ cm}$$

con los datos de figura 15, y ecuación (55):

$$J_t = \frac{16 \times 15^2 \times 9,635^2}{\frac{15,0}{0,3955} + \frac{9,635}{0,75}} = 6.582,27 \text{ cm}^4$$

Usando la ecuación (34) y con datos de figura (16) vendría:

$$\delta_2 = 0,75 \quad \delta_1 = 0,3955$$



$$h_1 = 0,75 \quad h_2 = 0,3955$$

Figura 15

$$J_t = \frac{2 \times 30^2 \times 19,27^2 \times 0,3955 \times 0,75}{30,75 \times 0,75 - 19,665 \times 0,3955 - 0,3955^2 - 0,75^2} = 6.581,68 \text{ cm}^4$$

El error entre estos dos últimos valores es 0,00009 %, ambas ecuaciones son iguales, la pequeña diferencia proviene de los productos y cocientes que son diferentes. J_t se puede calcular con cualquiera de las dos ecuaciones, (55) que es también (23), o con ecuación (34).

Todo lo dicho anteriormente, es aplicable a secciones armadas de doble simetría a fin de calcular el módulo de torsión J_t . Solo consiste en calcular una chapa continua equivalente a las diagonales o presillas, y luego con ecuaciones (23), (34) y (55) obtener el valor de J_t buscado.

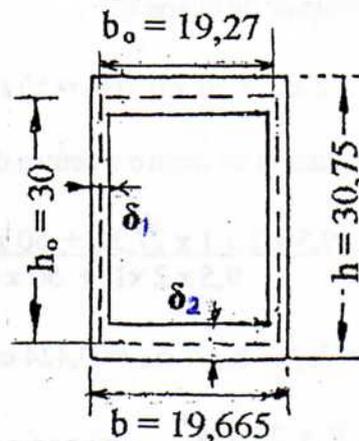


Figura 16

Analizando otra sección, el camino sería el mismo. Una sección armada por cuatro ángulos de alas iguales 100 x 100 x 10 mm, separados de centro a centro de gravedad de 50 cm en ambas direcciones (sección cuadrada), unidos por diagonales, siendo éstas angulares de alas iguales de 30 x 4 mm, figura 17.

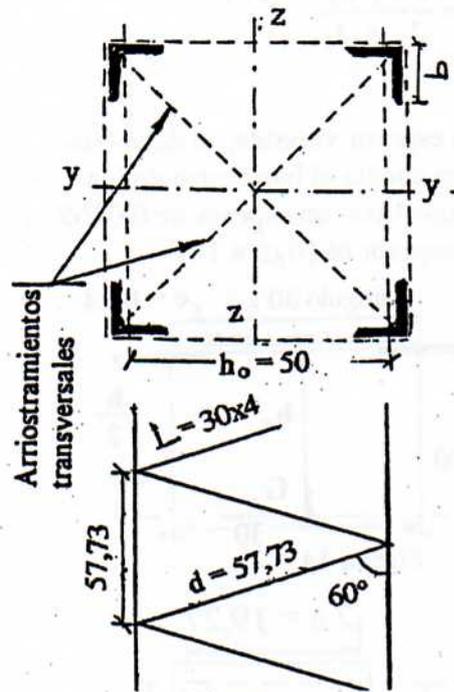


Figura 17

Datos: perfil angular de alas iguales L-100 x 10 mm

$$A = 19,2 \times 4 = 76,8 \text{ cm}^2 \quad A_l = 19,2 \text{ cm}^2 \quad i_{yl} = i_{zl} = 3,04 \text{ cm}$$

$$e = 2,82 \text{ cm} \quad i_{l \min} = 1,95 \text{ cm} \quad J_{yl} = J_{zl} = 177 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_z = 48.000 \text{ cm}^4 \quad i_y = i_z = 25 \text{ cm} \quad b = 10 \text{ cm}$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad t = 1,0 \text{ cm}$$

$$\sigma_F = 2,50 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{Angular } 30 \times 4 \text{ mm} \quad A_d = 2,27 \text{ cm}^2 \quad i_{d \min} = 0,58 \text{ cm}$$

$$d = 57,73 \text{ cm} \quad a = 57,73 \text{ cm}$$

Aplicando ecuación (9)

$$A_e = \frac{a h^2}{0,385} \cdot \frac{A_d}{2 d^3} = \frac{57,73 \times 50^2}{0,385} \cdot \frac{2 \times 2,27}{57,73^3 \cdot 2} = 4,423 \text{ cm}^2$$

$$50 t = 4,423 \quad \dots \quad t = 4,423 / 50 = 0,088 \text{ cm} \quad 0,044 \text{ cm} \text{ en c/cara}$$

El espesor de chapa es:

$$9,5 \times 2 \times 1 + 50 \times 0,044 = 50 t_e \quad \dots \quad t_e = 0,424 \text{ cm}$$

la distancia de centro a centro de gravedad será:

$$h_e = \frac{9,5 \times 2 \times 1 \times 27,32 + 50 \times 0,044 \times 28,032}{9,5 \times 2 \times 1 + 50 \times 0,044} = 27,394 \text{ cm}$$

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0,424 \text{ cm, y con ecuación (23) ó (55):}$$

$$J_t = \frac{8 \times 27,394^4}{\frac{27,394}{0,424}} = 74.333,03 \text{ cm}^4$$

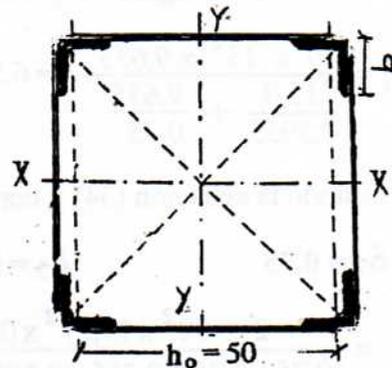


Figura 18

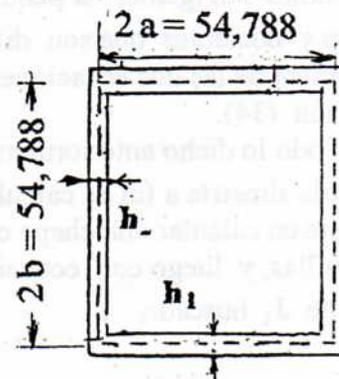


Figura 19

Una sección armada, cuyos parantes lo componen dos perfiles laminados P L U N° 380 mm, separados de 45 cm, de centro a centro de gravedad, unidos con diagonales de perfiles angulares, de alas iguales (40 x 3 mm), como puede verse en figura 20, el camino a seguir sería similar a los anteriores, y sería:

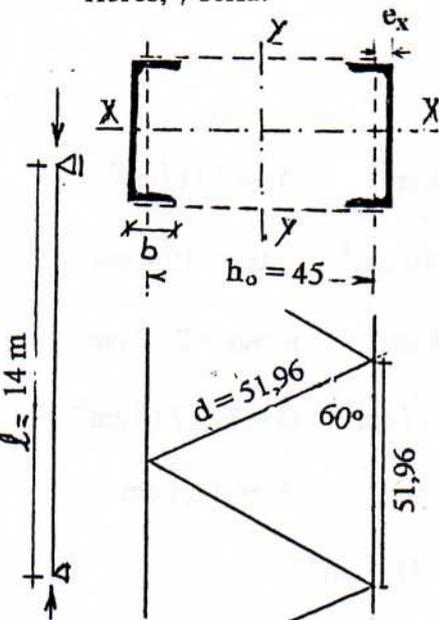


Figura 20

DATOS: perfil PNU 380 mm

$$A = 80,4 \times 2 = 160,8 \text{ cm}^2 \quad A_l = 80,4 \text{ cm}^2 \quad i_y = 14,0 \text{ cm}$$

$$i_{z1} = 2,77 \text{ cm} \quad \sigma_F = 2,5 \text{ t/cm}^2 \quad b = 10,2 \text{ cm}$$

$$t_w = 1,35 \text{ cm} \quad t = 1,60 \text{ cm} \quad J_y = 15.760 \times 2 = 31.520 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad e_x = 2,35 \text{ cm}$$

$$\text{ángulos de alas iguales } 40 \times 3 \text{ mm} \quad \sigma_F = 2,5 \text{ t/cm}^2$$

$$r_{\text{mín}} = 0,78 \text{ cm} \quad A_{1d} = 2,35 \text{ cm}^2 \quad e_x = 1,07 \text{ cm}$$

$$r_x = 1,21 \text{ cm} \quad r_y = 1,21 \text{ cm}$$

Con ecuación (9):

$$A_e = \frac{a h^2}{0,385} \frac{A_d}{2 d^3} = \frac{51,96 \times 45^2}{0,385} \frac{2 \times 2,35}{2 \times 51,96^3} = 4,578 \text{ cm}^2$$

$$45 t = 4,578 \text{ cm}^2 \quad \therefore t = 4,578 / 45 = 0,10 \text{ cm} \quad \begin{matrix} 0,05 \text{ cm} \\ \text{en c/cara} \end{matrix}$$

espesor de chapa :

$$10,2 \times 1,6 \times 2 + 48 \times 0,05 = 49,70 t_e \quad \therefore t_e = 0,716 \text{ cm}$$

$$h_e = \frac{10,2 \times 1,6 \times 18,2 \times 2 + 0,05 \times 48 \times 20,07}{2 \times 10,2 \times 1,6 + 0,05 \times 48} = 18,328 \text{ cm}$$

$$h_1 = 0,716 \text{ cm} \quad h_2 = 1,35 \text{ cm}$$

$$J_t = \frac{16 \times 18,328^2 \times 24,205^2}{\frac{18,328}{1,35} + \frac{24,175}{0,716}} = 66.457,19$$

$$J_t = 66,457,19 \text{ cm}^4$$

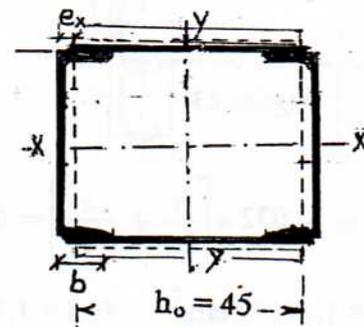


Figura 21

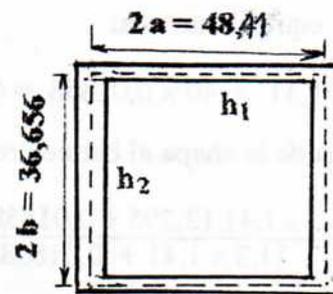


Figura 22

Dos perfiles doble te de doble simetría PNI 260 mm, componen una sección armada, separados de 40 cm, de centro a centro de gravedad, enlazados con presillas de 15 cm de alto por un centímetro de espesor, como se ve en figura 23. Con ecuación 18, se calcula el espesor equivalente de una chapa corrida:

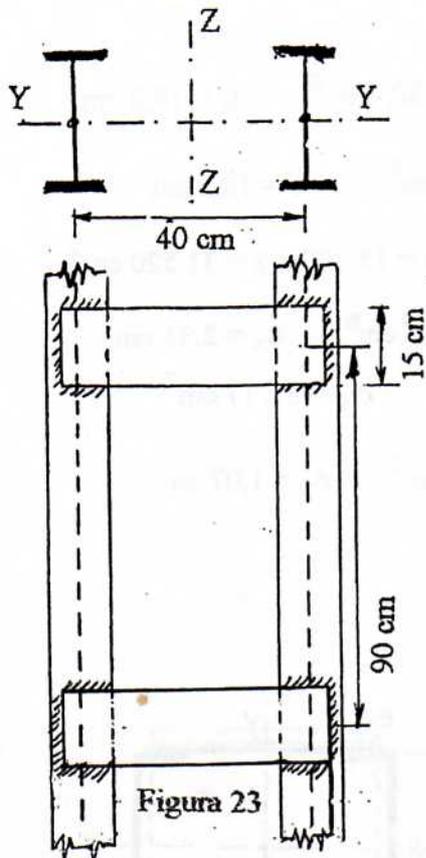


Figura 23

Doble te normales de 260 mm.

$$\begin{aligned}
 A &= 106,6 \text{ cm}^2 & A_l &= 53,3 \text{ cm}^2 & \sigma_F &= 2,5 \text{ t/cm}^2 \\
 J_y &= 11.480 \text{ cm}^4 & J_{yl} &= 5.740 \text{ cm}^4 & i_y &= 10,4 \text{ cm} \\
 J_z &= 43.216 \text{ cm}^4 & J_{zl} &= 288 \text{ cm}^4 & i_{z \text{ min}} &= 2,32 \text{ cm} \\
 i_z &= 20,13 \text{ cm} & E &= 2.100 \text{ t/cm}^2 & G &= 807,7 \text{ t/cm}^2 \\
 t &= 1,41 \text{ cm} & t_a &= 0,94 \text{ cm} & b &= 11,3 \text{ cm} \\
 W_x &= 442 \text{ cm}^4 & W_y &= 51,0 \text{ cm}^4 & &
 \end{aligned}$$

Presillas

15 cm de alto 1 cm de espesor

$J_t ?$

$$\frac{1}{A_e} = 0,032 a \left[\frac{h}{J_p} + \frac{a}{2 J_1} \right] = 0,032 \times 90 \left[\frac{40}{2 \times 281,25} + \frac{90}{2 \times 288} \right] = 0,6728$$

$$A_e = 1,48632 \text{ cm}^2 \dots 40 t = 1,48632 \quad t = \frac{1,16333}{40} = 0,037 \text{ cm}$$

en cada cara 0,01858 cm de espesor equivalente.

espesor equivalente total:

$$11,30 \times 1,41 + 40 \times 0,01858 = 40 t_e \quad t_e = 0,4169 \text{ cm}$$

distancia de la chapa al baricentro de la sección:

$$h_e = \frac{11,3 \times 1,41 \times 12,295 + 0,01858 \times 40 \times 13,50}{11,3 \times 1,41 + 0,01858 \times 40} = 12,678 \text{ cm}$$

$$h_1 = 0,4169 \text{ cm} \quad h_2 = 0,94 \text{ cm}$$

$$J_t = \frac{16 a^2 b^2}{\frac{a}{h_1} + \frac{b}{h_2}} = \frac{16 \times 20^2 \times 12,678^2}{\frac{20}{0,4169} + \frac{12,678}{0,94}} = 56.259,70 \text{ cm}^4$$

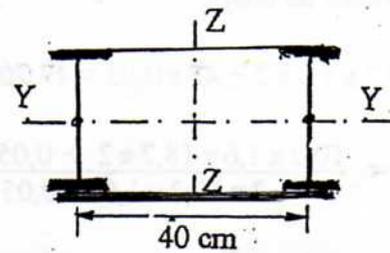


Figura 24

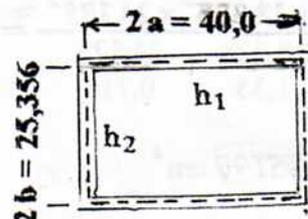
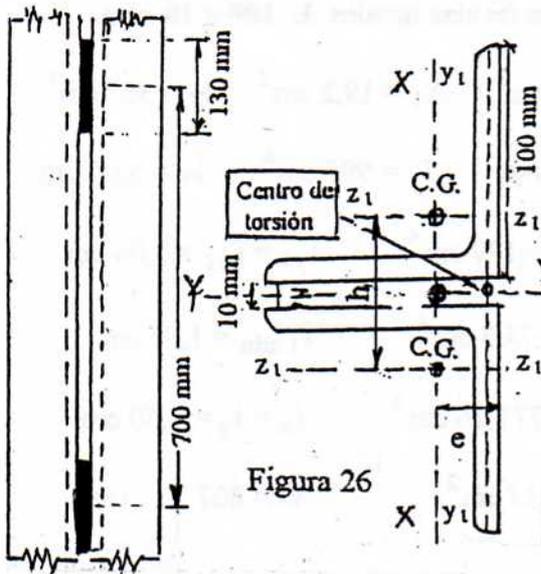


Figura 25

Dos perfiles angulares de alas iguales de 100 x 100 x 10 mm, separados por una presilla de 13 x 1 cm, soldadas y con 70 cm de separación, como se ve en figura 26, calcular J_t



Angulares de alas iguales L 100 x 10 mm.

$$A = 38,4 \text{ cm}^2 \quad A_l = 19,2 \text{ cm}^2 \quad \sigma_F = 2,50 \text{ t/cm}^2$$

$$J_{(y-x)} = 177 \text{ cm}^4 \quad J_{y-x} = 354 \text{ cm}^4 \quad i_y = i_x = 3,04 \text{ cm}$$

$$J_{\min} = 73,3 \text{ cm}^4 \quad J_y = 777,26 \text{ cm}^4 \quad i_y = 4,50 \text{ cm}$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad e = 2,82 \text{ cm}$$

Presillas 130 x 90 x 10 mm c / 70 cm

$$h = 6,64 \text{ cm}$$

Figura 26

Con ecuación (18), se calcula el espesor de una chapa corrida, en toda la longitud de la columna, equivalente a las presillas:

$$J_P = 9 \times 1^3 / 12 = 0,75 \text{ cm}^4 \quad J_I = 177 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{A_e} = 0,032 a \left[\frac{h}{J_P} + \frac{a}{2 J_I} \right] = 0,032 \times 70 \left[\frac{6,64}{0,75} + \frac{70}{2 \times 177} \right] = 20,267$$

$$A_e = 0,049 \text{ cm}^2 \quad 9t = 0,049 \text{ cm}^2 \quad t = 0,049 / 9 = 0,00548 \text{ cm}$$

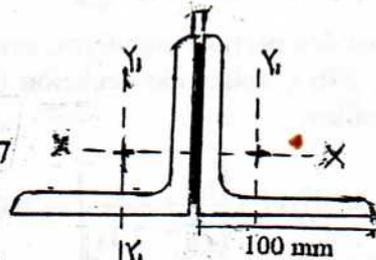


Figura 27

t = espesor de la chapa corrida, equivalente a las presillas.

Esto significa, que se reemplazan a las presillas por una chapa corrida, de espesor muy pequeño, de 0,00548 cm, convirtiéndose la sección en una T, con su alma engrosada en 0,00548 cm, para su comportamiento a torsión uniforme, figura 27,

Si se busca J_t de los dos angulares solamente, sin estar unidos por presillas sería:

$$J_t = (1^3 \times 9,5 \times 2) / 3 = 12,666 \text{ cm}^4 \quad J_{\text{chapa}} = (9 \times 0,00548^3) / 3 = 0,00000049 \text{ cm}^4$$

Pero las presillas están soldadas, trabajando como una sección armada, variando el valor de J_t :

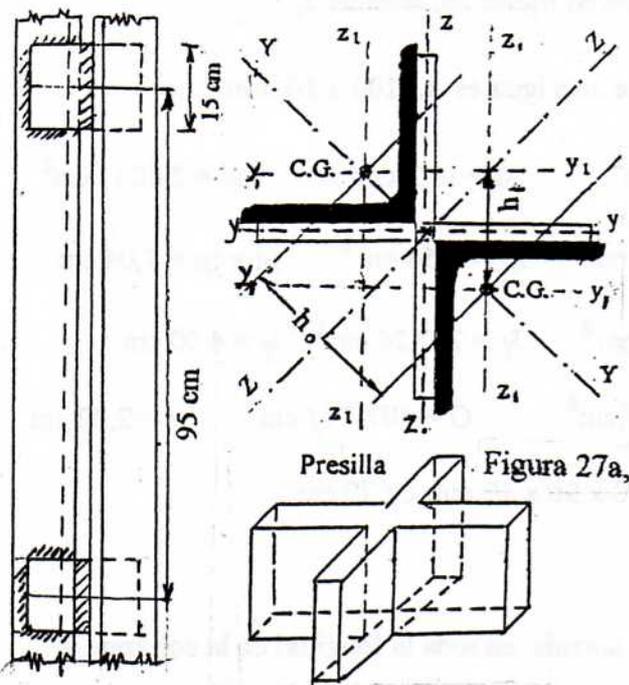
$$J_t = (9,5 \times 2,005^3 + 20,005 \times 1^3) / 3 = 32,19 \text{ cm}^4$$

y este último valor debe multiplicarse por 1,12, según la investigación de Kappus, para tener en cuenta la vinculación entre ala y alma.

$J_t = 1,12 \times 32,19 = 36,05 \text{ cm}^4$ pero este no sería el verdadero valor, pues las presillas están soldadas en 15 cm de largo, y hay 47 sin soldar, se puede sacar un valor aproximado, por longitudes

$J_t = (32,19 \times 26 + 12,666 \times 57) / 83 = 18,78 \text{ cm}^4$ si es soldado sería este valor, pero si es abulonado conviene usar $J_t = 12,666 \text{ cm}^4$, y esto sería una afinación del cálculo, pero esto tiene poca importancia en el resultado final de lo que se quiere obtener (en pandeo por torsión)

Dos perfiles angulares de alas iguales, formando cruz, de 100 x 10 mm, separados por presillas de espesor 10 mm, y altura 15 cm, separación de 95 cm, como se ve en figura 27a, calcular J_t .



Angulares de alas iguales L 100 x 10 mm.

$$A = 38,4 \text{ cm}^2 \quad A_1 = 19,2 \text{ cm}^2 \quad J_X = 560 \text{ cm}^4$$

$$i_X = 3,82 \text{ cm} \quad J_Y = 995 \text{ cm}^4 \quad i_Y = 5,09 \text{ cm}$$

$$J_{y1} = J_{x1} = 177 \text{ cm}^4 \quad i_{y1} = i_{x1} = 3,04 \text{ cm}$$

$$J_{1-1 \text{ mín}} = 73,3 \text{ cm}^4 \quad i_{1 \text{ mín}} = 1,95 \text{ cm}$$

$$J_x = J_y = 777,26 \text{ cm}^4 \quad i_x = i_y = 4,50 \text{ cm}$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2$$

$J_t ?$

Estos dos perfiles angulares, simbólicamente están unidos con una presilla en dirección del eje X-X fig. 27b, aplicando ecuación (18), se calcula el espesor de una chapa corrida, equivalente a las presillas:

$$\frac{1}{A_e} = 0,032 a \left[\frac{h}{J_p} + \frac{a}{2 J_1} \right] = 0,032 \times 95 \left[\frac{9,39}{393,75} + \frac{95}{2 \times 73,3} \right] = 2,04$$

$$J_p = 1,4 \times 15^3 / 12 = 393,75 \text{ cm}^4$$

$$A_e = 1 / 2,04 = 0,48962 \text{ cm}^2 \quad 1,41462 \text{ t} = 0,49 \text{ cm}^2$$

$$t = 0,49 / 1,4142 = 0,346 \text{ cm} \quad \text{proyectandola se tiene en}$$

cada cara, una chapa de espesor $t = 0,245 \text{ cm}$, figura 27 c. Calculando el momento de inercia de la zona sin presillas:

$$J_t = [9,5 \times 1^3 / 3] \times 2 \times 2 = 12,666 \text{ cm}^4$$

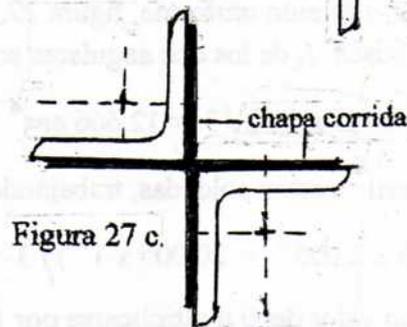
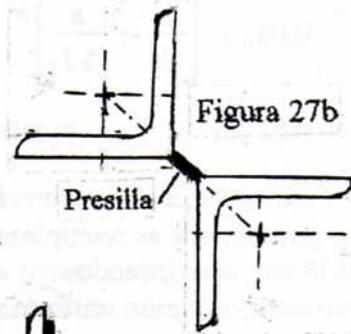
y en la zona de presillas:

$$J_t = [9,5 \times 1,245^3 / 3] \times 2 \times 2 = 24,444 \text{ cm}^4$$

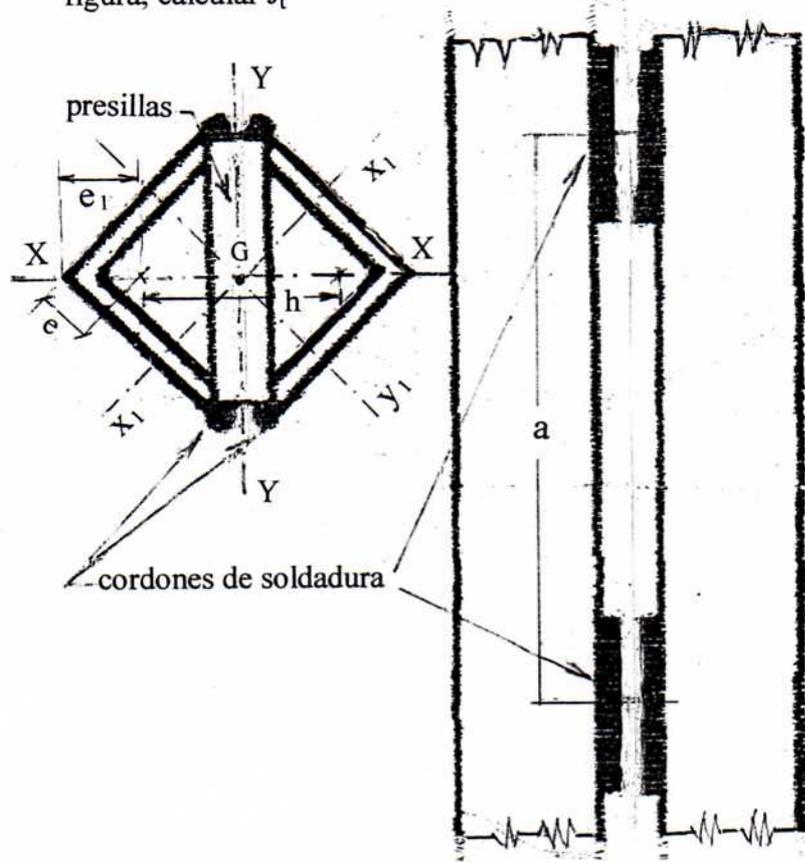
y como anteriormente se dijo, no sería el verdadero valor, las presillas están soldadas en 15 cm de largo y hay 80 cm sin soldar, se saca un valor bastante aproximado por longitudes:

$$J_t = (12,666 \times 80 + 24,444 \times 30) / 110 = 15,878 \text{ cm}^4$$

Si las presillas están soldadas, este último valor sería el correcto, pero si están abulonadas, conviene usar $12,666 \text{ cm}^4$.



Dos perfiles angulares de alas iguales, de 100 x 100 x 10 mm, separados por una presilla de 15 x 1 cm, soldadas y con 60 cm de separación, unidos en la punta de las alas, como se ve en la figura, calcular J_t



Angulares de alas iguales 100 x 10 mm

$$A = 38,4 \text{ cm}^2 \quad A_1 = 19,2 \text{ cm}^2$$

$$F_y = 2,5 \text{ t / cm}^2 \quad J_z = 560 \text{ cm}^4$$

$$J_x = 560 \text{ cm}^4 \quad J_y = 773 \text{ cm}^4$$

$$J_{l \text{ mín}} = 73,3 \text{ cm}^4 \quad i_x = 3,82 \text{ cm}$$

$$i_y = 4,48 \text{ cm} \quad i_{l \text{ mín}} = 1,95 \text{ cm}$$

$$J_{(y-x)l} = 177 \text{ cm}^4 \quad e_1 = 3,988 \text{ cm}$$

$$i_{y1} = i_{x1} = 3,04 \text{ cm} \quad e = 2,82 \text{ cm}$$

$$h = 6,164 \text{ cm}$$

Presilla 150 x 14,5 x 10 mm (soldada)

Con ecuación (18), se calcula el espesor de una chapa corrida, en toda la longitud de la columna, equivalente a las presillas:

$$J_p = 14,43 \times 1^3 / 12 = 1,178 \text{ cm}^4 \quad J_l = 177 \text{ cm}^4$$

$$\frac{1}{A_e} = 0,032 a \left[\frac{h}{J_p} + \frac{a}{2 J_l} \right] = 0,032 \times 60 \left[\frac{6,154}{1,178} + \frac{60}{2 \times 73,3} \right] = 10,83$$

$$A_e = 0,09233 \text{ cm}^2 \quad 14,5 \text{ t} = 0,09233 \text{ cm}^2 \quad t = 0,09233 / 14,5 = 0,00638 \text{ cm}$$

t = espesor de la chapa corrida, equivalente a las presillas.

Esto significa, que se reemplazan a las presillas por una chapa corrida, de espesor muy pequeño, de 0,00638 cm, convirtiéndose la sección en un cajón cerrado, con su alma engrosada en 0,00638 cm, para su comportamiento a torsión uniforme, figura 27,

Pero las presillas están soldadas, trabajando como un marco cerrado, y el valor de J_t es, según ecuación (23)

$$J_t = \frac{32 \times (4,75)^2 \times (4,75)^2}{(4,75 / 1,00) \times 4} = 857,375 \text{ cm}^4$$

4.- Módulo de alabeo.

La determinación del módulo de alabeo, en barras armadas, es similar al de las barras simples, pero un poco más complicada su demostración, y depende del tipo de sección. Se debe tener siempre presente que, los parantes absorben los momentos flectores que produce la torsión, y los medios de enlace solamente corte, sean diagonales o presillas, figura 28.

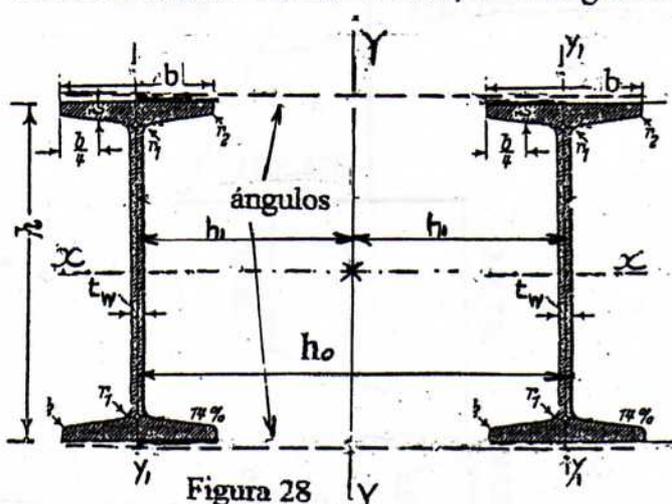


Figura 28

Datos del perfil normal doble te 200 mm

$A = 33,4 \times 2 = 66,8 \text{ cm}^2$ $A_1 = 33,4 \text{ cm}^2$

$b = 90 \text{ cm}$ $t_f = 1,13 \text{ cm}$ $t_w = 0,75 \text{ cm}$

$i_x = 8 \text{ cm}$ $i_y = 1,87 \text{ cm}$ $\sigma_F = 2,55 \text{ t/cm}^2$

$J_x = 2.140 \times 2 = 4.280 \text{ cm}^4$ $h_o = 30 \text{ cm}$

$J_y = 15.030 \text{ cm}^4$ $G = 807,7 \text{ t/cm}^2$

$E = 2.100 \text{ t/cm}^2$

Analizando el ejemplo anterior, dos PNI de 200 mm de altura, separados de 30 cm, cuyos datos se conocen, se toma por comodidad al espesor de las alas del perfil, como constantes. Estas secciones armadas trabajan como un doble te de doble simetría, en la cual ambos perfiles separados, constituyen las alas de esta sección de doble simetría, figura 29, tomando siempre para determinar las coordenadas sectoriales, las líneas medias de los espesores del perfil, tomando el de la derecha y numerándolo para obtener los detalles:

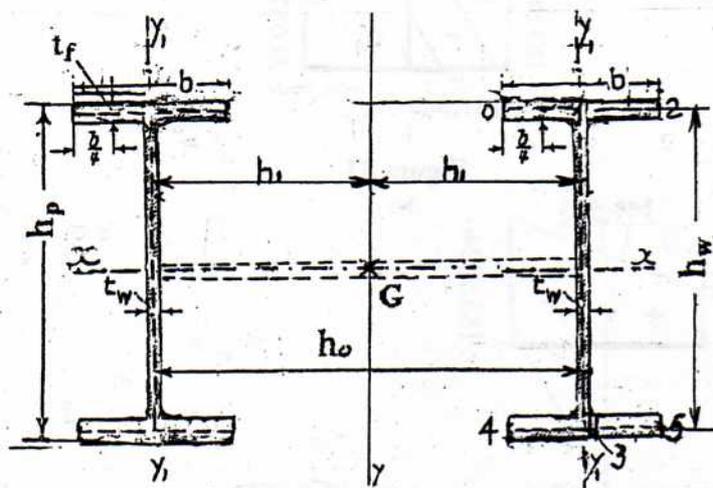


Figura 29

$h_o = 30 \text{ cm}$ $h_w = 18,87 \text{ cm}$

$b/2 = 4,50 \text{ cm}$ $t_w = 0,75 \text{ cm}$

$t_f = 1,13 \text{ cm}$ $b = 9,0 \text{ cm}$

4.1 - Cálculo de las coordenadas sectoriales. Comenzando de θ , y recorrido hacia la derecha se las obtiene, pero cabe recordar que no son las verdaderas, a ésta hay que calcularlas en función de las primeras (ver publicación del autor "Torsión no uniforme, pandeo por torsión y flexotorsión, en barras de alma llena, año 2.005)

0.- 0

1.- $9,435 \times 4,5 = 42,4575$

2.- $47,4575 + 4,5 \times 9,435 = 84,915$

3.- $42,4575 + 15 \times 18,87 = 325,5075$

4.- $325,50,75 + 4,5 \times 9,435 = 367,965$

5 $325,5075 - 4,5 \times 9,435 = 283,05$

Estos valores pueden verse reflejados en el perfil esquemático de figura 30.

Se busca ahora la verdadera coordenada sectorial en punto 0::

$$\frac{(84,915) 9,0 \times 1,13}{2} = 431,792$$

$$\frac{(42,4575 + 325,5075) 18,87 \times 0,75}{2} = 2.603,812$$

$$\frac{(367,965 + 283,05) 9 \times 1,13}{2} = 3.319,411$$

$$\Sigma = 6.346,015$$

$$\phi_0 = 6.346,015 / 34,495 = 183,98246$$

verdadero valor de c.s. en punto 0, y en función de ella se calculan las verdaderas en otros puntos figura 31. Lo mismo se puede hacer con el otro perfil. y entonces el diagrama sería el mismo, pero con signo cambiado, quedando finalmente las c.s. como se ve en figura 32

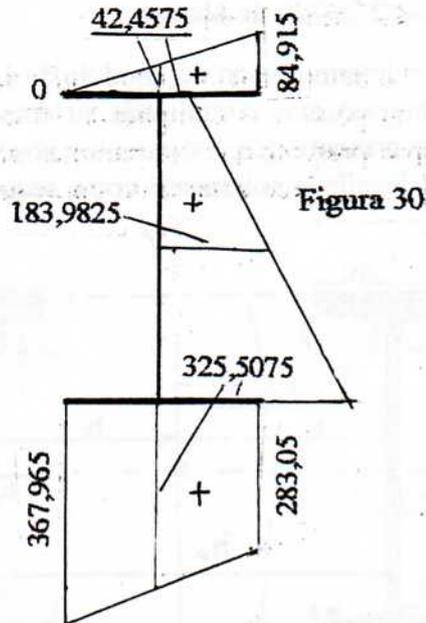


Figura 30

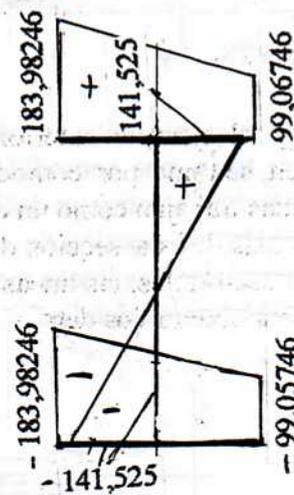


Figura 31

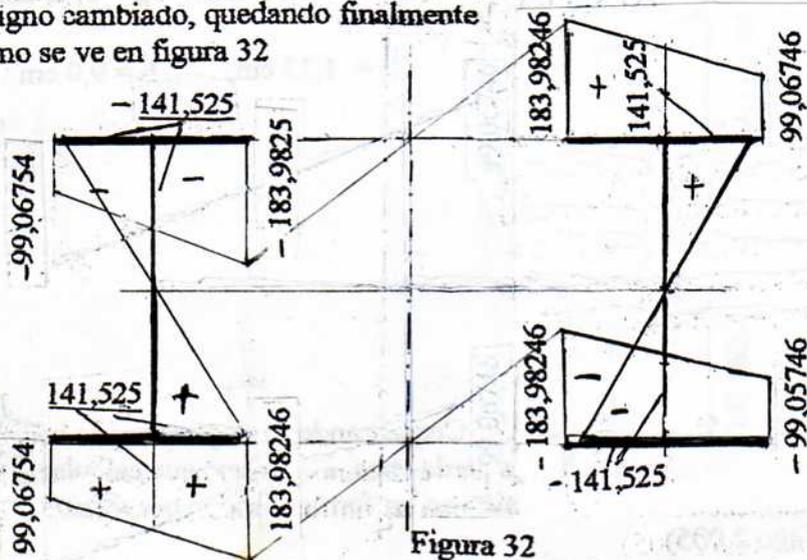


Figura 32

Como el centro de gravedad coincide con el centro de torsión, estas serán las verdaderas c.s., y en función de estas se calcula el valor del módulo de alabeo.

4.2- Cálculo del módulo de alabeo. De acuerdo a lo estipulado en la publicación "Torsión no uniforme" del autor, se sigue el siguiente camino:

$$[183,98246^2 + 99,06746 \times 183,98246 + 99,06746^2] (9 \times 1,13) (1/3) = 209.809,0737 \text{ cm}^6$$

$$[141,525^2 + 0 + 0] (9,435 \times 0,75 \times 2) (1/3) = 94.488,2900 \text{ cm}^6$$

$$[183,98246^2 + 99,06746 \times 183,98246 + 99,06746^2] (9 \times 1,13) (1/3) = 209.809,0737 \text{ cm}^6$$

$$\Sigma = 514.106,4376 \text{ cm}^6$$

Pero esto corresponde a un perfil, habrá que multiplicar por dos:

$$C_w = 2 \times 514.106,4376 = 1.028.212,875 \text{ cm}^6$$

Si se hubiese tomado la ecuación conocida:

$$C_w = \frac{h^2 J_x}{4} = \frac{30^2 \times 2 \times 2.140}{4} = 963.000 \text{ cm}^6 \quad \text{diferencia del 6,77 \%}$$

Pero el uso de esta última ecuación, habrá que demostrarse, y oportunamente se hará. Se debe tener en cuenta que se tomó el espesor del ala del perfil como constante, cuando en realidad no lo es, si se tiene en cuenta esto, los resultados se acercan más. Analizando en forma simbólica, y no numérica verá a que conclusiones se llegan, con el cálculo de las coordenadas sectoriales, figura 33:

0) 0

$$1) \frac{h_w b}{2 \cdot 2} = \frac{h_w b}{4} \quad 2) \frac{h_w b}{2}$$

$$3) \frac{h_w b}{4} + h_w h_1 = \frac{h_w (b + 4 h_1)}{4}$$

$$4) \frac{h_w (b + 4 h_1)}{4} + \frac{h_w b}{2 \cdot 2} = \frac{h_w (2b + 4 h_1)}{4}$$

$$5) \frac{h_w (b + 4 h_1)}{4} - \frac{h_w b}{2 \cdot 2} = h_w h_1$$

Se busca el valor de la c.s. en 0:

$$1) \frac{1}{2} \frac{h_w b}{2}, t_f b = \frac{h_w b^2}{4} t_f$$

$$2) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h_w b}{4} + \frac{h_w (b + 4 h_1)}{4} \right) \right] h_w t_w = \frac{1}{2} \frac{h_w (2b + 4 h_1)}{4} h_w t_w$$

$$3) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h_w (2b + 4 h_1)}{4} + h_w h_1 \right) \right] b t_f = \frac{h_w (2b + 8 h_1)}{8} b t_w$$

$$\Sigma / (2 b t_f + h_w t_w) = \frac{h_w (b + 2 h_1)}{4} = \frac{h_w (b + h)}{4} \quad (58)$$

y esta es la c.s. en 0, calculándose con ella las demás, figura 34.

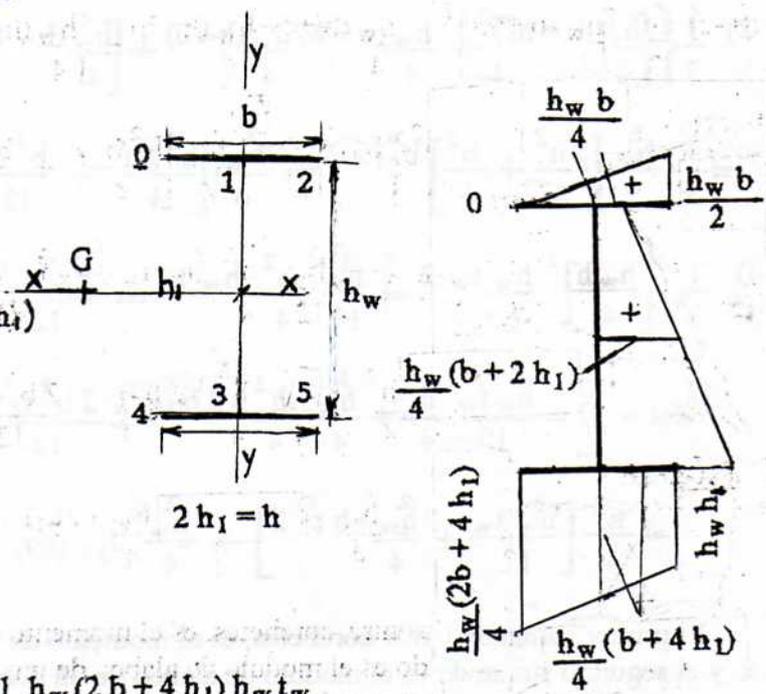


Figura 33

4.3 Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales.

$$0.- \frac{h_w(b+h)}{4}$$

$$2 h_1 = h$$

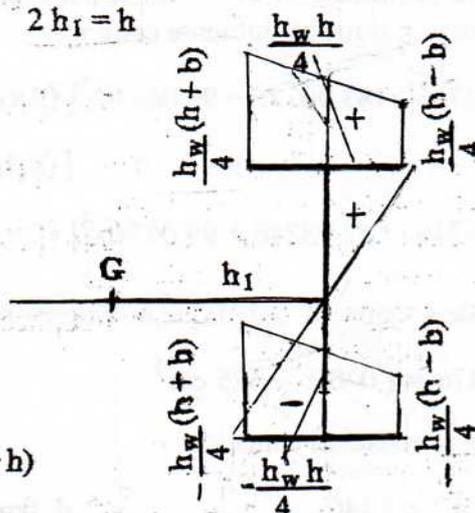


Figura 34

$$1.- \frac{h_w(b+h)}{4} - \frac{h_w b}{4} = \frac{h_w h}{4}$$

$$2.- \frac{h_w(b+h)}{4} - \frac{h_w b}{2} = \frac{h_w(h-b)}{4}$$

$$3.- \frac{h_w(b+h)}{4} - \frac{h_w(b+2h)}{4} = -\frac{h_w h}{4}$$

$$4.- \frac{h_w(b+h)}{4} - \frac{h_w(b+h)}{2} = -\frac{h_w(b+h)}{4}$$

$$5.- \frac{h_w(b+h)}{4} - h_w h = -\frac{h_w(h-b)}{4}$$

4.4 Cálculo del módulo de alabeo C_w

$$(0-2) \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_w(b+h)}{4} \right]^2 + \frac{h_w(b+h)}{4} \frac{h_w(h-b)}{4} + \left[\frac{h_w(h-b)}{4} \right]^2 \right\} b t_f \times 2 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{h_w^2}{4} \left[\frac{3h^2}{4} + \frac{b^2}{4} \right] b t_f \times 2 = \frac{h_w^2}{4} \left[\frac{h^2 b t_f}{4} + \frac{b^3 t_f}{12} \right] \times 2$$

$$(3-1) \frac{1}{3} \left[\frac{h_w h}{4} \right]^2 \frac{h_w t_w}{2} = \frac{h_w^2}{12} \frac{h^2}{4} h_w t_w = \frac{h_w^3 t_w}{12} \frac{h^2}{4}$$

$$C_{w1} = \sum = \frac{h_w^3 t_w}{12} \frac{h^2}{4} + \frac{h_w^2}{4} \frac{h^2}{4} 2 b t_f + \frac{2 b^3 t_f}{12} \frac{h_w^2}{4} =$$

$$= \frac{h^2}{4} \left[\frac{h_w^3 t_w}{12} + \frac{h_w^2}{4} \cdot b t_f \cdot 2 \right] + \frac{h_w^2}{4} J_{y1} \quad (59) \quad \frac{2 b^3 t_f}{12} \cong J_{y1}$$

El primer sumando entre corchetes, es el momento de inercia del perfil con respecto al eje x-x, y el segundo sumando es el módulo de alabeo de un doble te, o sea el módulo de alabeo propio de un perfil con respecto a su baricentro, quedando en consecuencia la ecuación

$$C_{w1} = \frac{h^2}{4} J_{x1} + \frac{h_w^2}{4} J_{y1} \quad (60)$$

J_{y1} = inercia de un perfil con respecto a su propio eje y₁-y₁

Pero todo esto es para un solo perfil, o sea que se deberá multiplicar por dos, obteniéndose C_w total:

$$C_w = 2 \left[\frac{h^2}{4} J_{x1} + \frac{h_w^2}{4} J_{y1} \right] = \frac{h^2}{4} J_x + \frac{h_w^2}{4} 2 J_{y1} \quad (61)$$

J_{x1} = momento de inercia de un perfil, con respecto al eje x-x.

J_x = momento de inercia de los dos perfiles, con respecto al eje x-x.

Queda perfectamente demostrado, que en secciones armadas, al alabeo de la sección total, se debe sumar, el alabeo propio de cada perfil. Esto mismo también ocurre, en las secciones de alma llena, en el cual los alabeos propios de las alas y alma tienen un valor cada uno de $(d^3 t^3) / 144$, que se deben sumar, pero en nuestro caso es un valor muy pequeño y se lo desprecia.

Para el caso que se analiza, dos perfiles doble te de 200 mm separados de 30 cm, sería:

$$C_w = 963.000 + 10.500 \times 2 + 14,61 + 19,685 = 984.034,295 \text{ cm}^6$$

$$C_w = 963000 + 10.500 \times 2 = 984.000 \text{ cm}^6$$

Al no tener en cuenta los alabeos propios de las alas y el alma, el error es de 0,003 %, y al no tener en cuenta el alabeo propio de cada perfil el error es de 2,18 %.

Es fácil demostrar que en un perfil, de alma llena, las alas y el alma, suman los alabeos propios. Tomando un perfil doble te de doble simetría (figura 35):

$\Phi_g = (h/2 \pm y_1) x_1$ coordenada sectorial de las alas

$$C_{w1} = \int (\Phi_g)^2 dA = \int [(h_w/2) \pm y_1] x_1^2 dx_1 dy_1$$

$$(\Phi_g)^2 = [(h_w/2) + y_1]^2 x_1^2 = [(h_w/2)^2 + y_1^2 + h_w y_1] x_1^2$$

$$C_{w1} = \left\{ (h_w/2)^2 2 \int_0^{b/2} x_1^2 dx_1 + y_1^2 2 \int_0^{b/2} x_1^2 dx_1 + h_w y_1 2 \int_0^{b/2} x_1^2 dx_1 \right\} dy_1 =$$

Puede verse que la última integral es nula

$$= \left\{ \int_0^{b/2} (h_w/2)^2 2 \left| x_1^3/3 \right|_0^{b/2} + y_1^2 2 \left| x_1^3/3 \right|_0^{b/2} \right\} dy_1 =$$

$$= (h_w/2)^2 (b^3/12) 2 \int_0^{t_f/2} dy_1 + (b^3/12) 2 \int_0^{t_f/2} y_1^2 dy_1 =$$

$$= (h_w/2)^2 (b^3 t_f/12) + (b^3 t_f^3/144)$$

y esto es para una sola ala, o sea se debe multiplicar por dos

$$C_w = 2 (h_w/2)^2 (b^3 t_f/12) + 2 (b^3 t_f^3/144) =$$

$$= (h_w/2)^2 J_y + 2 (b^3 t_f^3/144) \quad (62)$$

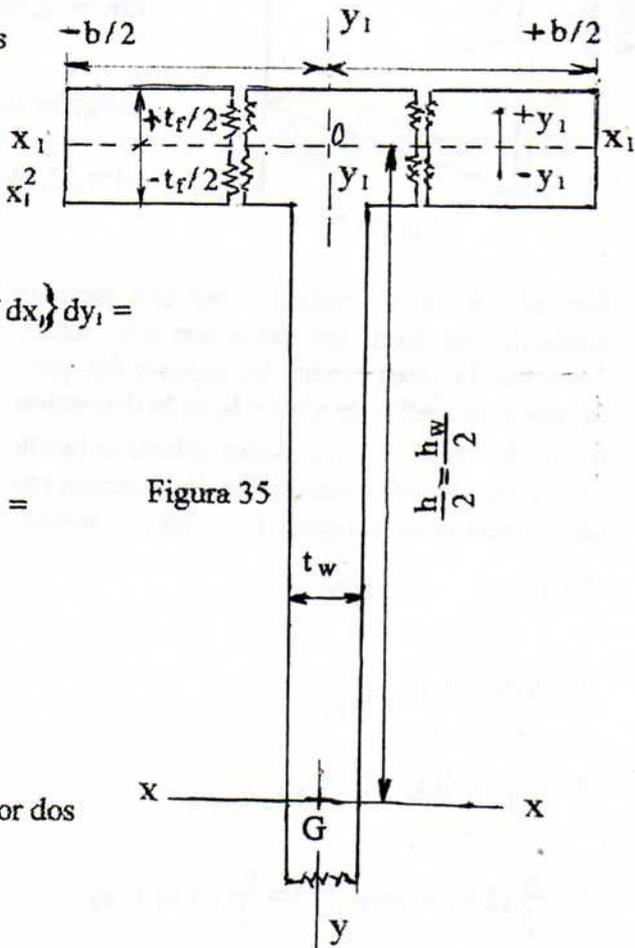
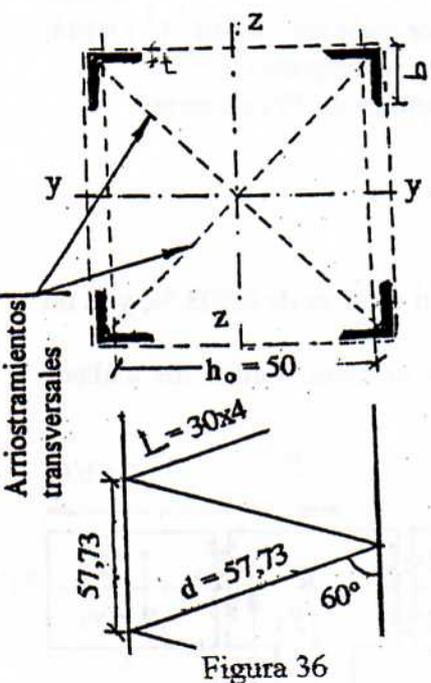


Figura 35

y faltaria sumar a esto el alabeo propio del alma del perfil, cosa que no hemos tenido en cuenta en la deducción, que seria $(h_w t_w / 144)$. El primer término de la última ecuación (62), es el que figura en las tablas de perfiles doble te de alma llena y doble simetría (ver publicación del autor "Pandeo por torsión y flexotorsión, 2.005).

5.- Sección armada con cuatro angulares- Anteriormente se ha calculado J_t de ésta sección, pero ahora se quiere saber que valor tiene el módulo de alabeo, de esta sección formada por cuatro angulares de alas iguales, y no interesa como estan unidos, por presillas o diagonales, pues estos solamente absorben corte, figura (36).



Datos: perfil angular de alas iguales **L-100 x 10 mm**

$$A = 19,2 \times 4 = 76,8 \text{ cm}^2 \quad A_l = 19,2 \text{ cm}^2 \quad i_{y1} = i_{z1} = 3,04 \text{ cm}$$

$$e = 2,82 \text{ cm} \quad i_{\min} = 1,95 \text{ cm} \quad J_{y1} = J_{z1} = 177 \text{ cm}^4$$

$$J_y = J_z = 48.000 \text{ cm}^4 \quad i_y = i_z = 25 \text{ cm} \quad b = 10 \text{ cm}$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad t = 1,0 \text{ cm}$$

$$\sigma_F = 2,50 \text{ t/cm}^2$$

$$\text{Angular } 30 \times 4 \text{ mm} \quad A_d = 2,27 \text{ cm}^2 \quad i_{\min} = 0,58 \text{ cm}$$

$$d = 57,73 \text{ cm} \quad a = 57,73 \text{ cm}$$

Pero el análisis, se realiza sobre una sección simbólica, es decir, los datos son solo letras. Tomando la línea media del espesor del perfil, como el ancho de ala es **b**, se la denomina $b_1 = (b - t/2)$, y para poder aplicar la teoría de las coordenadas sectoriales, la distancia entre las misma es **h**, figura 37, y las c.s. serian:

$$0.- 0 \quad 1.- \frac{h b_1}{2}$$

$$2.- \frac{h b_1}{2} + \frac{h b_1}{2} = h b_1$$

$$3.- h b_1 + \frac{h c}{2} = \frac{h}{2} (2 b_1 + c)$$

$$4.- \frac{h}{2} (2 b_1 + c) + \frac{h b_1}{2} = \frac{h}{2} (3 b_1 + c)$$

$$5.- \frac{h}{2} (3 b_1 + c) + \frac{h b_1}{2} = \frac{h}{2} (4 b_1 + c)$$

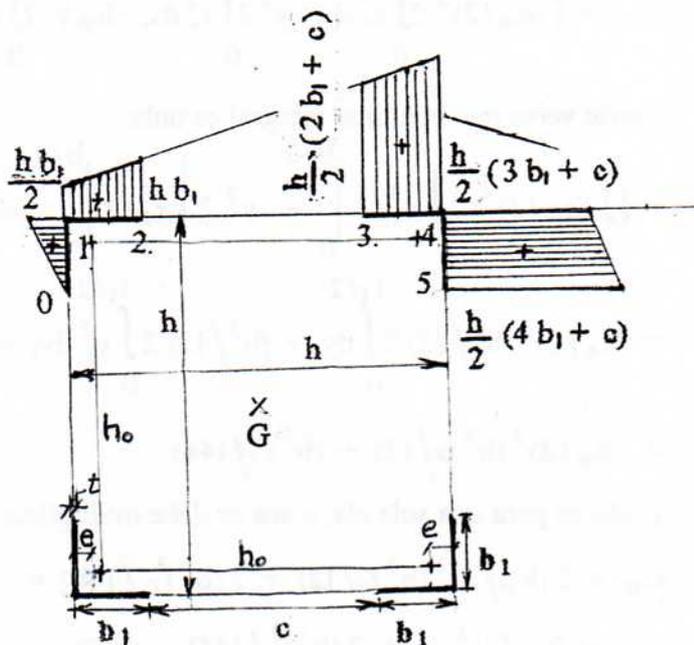


Figura 37

y ahora se busca el valor de la c. s. en el punto de partida 0:

$$1.- \frac{1}{2} \cdot \frac{h b_1}{2} b t = \frac{h b_1}{4} b t$$

$$2.- \frac{1}{2} \left[\frac{h b_1}{2} + h b_1 \right] b t = \frac{3 h b_1}{4} b t$$

$$3.- \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} (b_1 + c) + \frac{h}{2} (3 b_1 + c) \right] b t = \frac{h}{4} (5 b_1 + 2 c) b t$$

$$4.- \frac{1}{2} \left[\frac{h}{2} (3 b_1 + c) + \frac{h}{2} (4 b_1 + c) \right] b t = \frac{h}{4} (7 b_1 + 2 c) b t$$

$$\Sigma = \frac{h}{4} (16 b_1 + 4 c) b t$$

$$\varphi = \frac{h (16 b_1 + 4 c) b t}{4 \cdot 4 b_1 t} = \boxed{\frac{h}{4} (4 b_1 + c)} \quad (63)$$

5.1.- Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales.

$$0.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c)$$

$$1.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c) - \frac{h}{2} b_1 = \frac{h}{4} (2 b_1 + c)$$

$$2.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c) - h b_1 = \frac{h c}{4}$$

$$3.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c) - \frac{h}{2} (2 b_1 + c) = -\frac{h c}{4}$$

$$4.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c) - \frac{h}{2} (4 b_1 + c) = -\frac{h}{4} (2 b_1 + c)$$

$$5.- \frac{h}{4} (4 b_1 + c) - \frac{h}{2} (4 b_1 + c) = -\frac{h}{4} (4 b_1 + c)$$

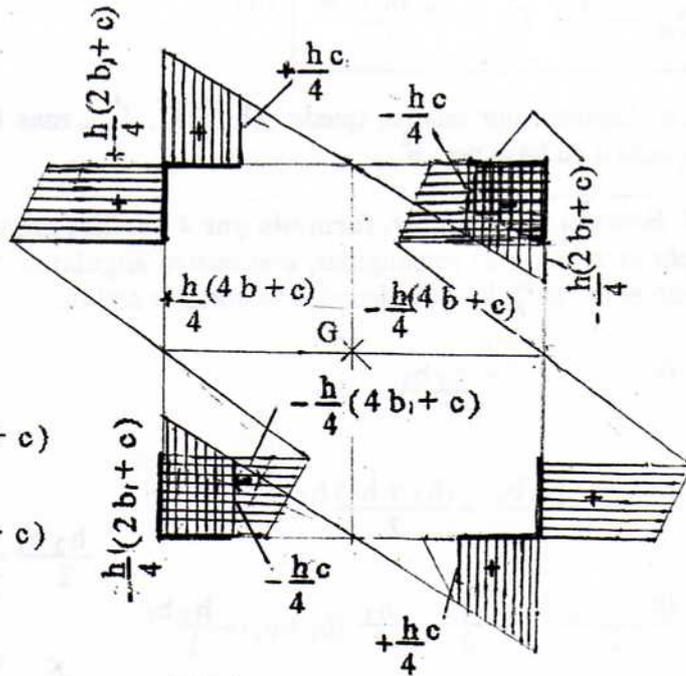


Figura 38

En los otros perfiles angulares, el diagrama es el mismo, pero con signo cambiado, figura 38.

5.2.- Cálculo del módulo de alabeo.

$$C_{wt} = \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h}{4} (4 b_1 + c) \right]^2 + \frac{h}{4} (4 b_1 + c) \frac{h}{4} (2 b_1 + c) + \left[\frac{h}{4} (2 b_1 + c) \right]^2 \right\} b t +$$

$$+ \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h}{4} (2 b_1 + c) \right]^2 + \frac{h}{4} (2 b_1 + c) \frac{h c}{4} + \left[\frac{h c}{4} \right]^2 \right\} b t =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h}{4} \right]^2 (32 b_1^2 + 24 b_1 c + 6 c^2) \right\} b_1 t = \left[\frac{h}{2} \right]^2 \left[\frac{4}{3} b_1^2 + b_1 c + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] 2 b_1 t =$$

$$\left[\frac{h}{2} \right]^2 \cdot \left[b_1^2 + \frac{1}{3} b_1^2 + b_1 c + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right] 2 b_1 t \quad \text{pero } \left(b_1 + \frac{c}{2} \right)^2 = b_1^2 + b_1 c + \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \left[\frac{h}{2} \right]^2$$

$$C_{w1} = \left[\frac{h}{2} \right]^2 \cdot \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{3} b_1^2 \right] 2 b_1 t \quad \left[\frac{h}{2} \right]^2 \cdot 2 b_1 t = \frac{J'_y}{4}$$

$$C_{w1} = \left[\frac{h}{2} \right]^2 \cdot \left[\frac{J'_y}{4} \right] + \frac{2 b_1^3 t}{3} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \quad J'_y = \text{momento de inercia total ficticio, con respecto al eje } y-y \text{ baricéntrico, de toda la sección.}$$

Para un solo angular, el módulo de alabeo es: $(h/2)^2 (J'_y/4)$, mas la inercia de las dos alas del angular, con respecto a su base, multiplicado por la mitad de h . Y esto es para un solo angular, como son cuatro, queda finalmente multiplicando por 4:

$$C_w = \left(\frac{h}{2} \right)^2 J'_y + \frac{2 b_1^3 t}{3} h^2 \quad (64) \quad h/2 = (h_0/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t/2)$$

Al multiplicar por cuatro, queda $(h/2)^2 \cdot J'_y$, mas la inercia de las ocho alas del angular con respecto a su base por h^2 .

Analizando, un poco mas en profundidad la ecuación (64):

$$(h/2) = (h_0/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t/2) \quad e = \text{distancia del baricentro al borde}$$

t = espesor del ala del angular

Reemplazando en la ecuación que dá el valor de J'_y viene:

$$J_y = 4 (h/2)^2 2 b_1 t = 4 [(h_0/2) + e_1]^2 2 b_1 t = 4 [(h_0/2)^2 + h_0 e_1 + (e_1)^2] 2 b_1 t =$$

$$= (h_0/2)^2 4 \times 2 b_1 t + 4 h_0 e_1 2 b_1 t + 4 (e_1)^2 2 b_1 t \quad \text{pero } 2 b_1 t = A_1 (\text{superficie de un angular})$$

$4 \times 2 b_1 t = A$ (superficie de los cuatro angulares), reemplazando queda:

$$J'_y = (h_0/2)^2 A + h_0 e_1 A + (e_1)^2 A = J_y + A [h_0 e_1 + (e_1)^2] = J_y + A e_1 (h_0 + e_1)$$

J_y = momento de inercia real, de la sección total.

Este momento de inercia ficticio J'_y , multiplicado por $(h/2)^2$, mas un segundo sumando brinda el valor total del módulo de alabeo (ecuación 64).

$$\begin{aligned}
 C_w &= [(h_o/2) + e_1]^2 \{J_y + A e_1 [h_o + e_1]\} + (2/3) b_i^3 t (h_o + 2 e_1)^2 = \\
 &= [(h_o/2)^2 + h_o e_1 + e_1^2] \{J_y + A e_1 (h_o + e_1)\} + (2/3) b_i^3 t (h_o + 2 e_1)^2 = \\
 &= \frac{(h_o/2)^2 J_y}{(1)} + \frac{(h/2)^2 [A e_1 (h_o + e_1)]}{(2)} + \frac{h_o e_1 [J_y + e_1 A (h_o + e_1)]}{(3)} + \\
 &+ \frac{e_1^2 [J_y + A e_1 (h_o + e_1)]}{(4)} + \frac{(2/3) b_i^3 (h_o + 2 e_1)^2}{(5)} \quad (64a)
 \end{aligned}$$

Se ha desmenuzado la ecuación en esta forma, para analizarla mejor. Puede observarse que el primer término de esta ecuación (1), que brinda el valor del módulo de alabeo, corresponde a una sección como si ésta fuera de alma llena (ver tabla 1, caso 4, de la publicación del autor "Torsión no uniforme", 2.005), y es aproximadamente el 68 % del valor total, lo que significa que tomando solamente el primer término, se estaría ignorando el 32 % de su valor total, y éste sería menor que el real. El segundo término (2) es aproximadamente el 13 % del valor total, el tercer término (3) es aproximadamente el 15 % del total, el cuarto término (4), se aproxima al 0,7 % del total, y el quinto y último término (5), es aproximadamente el 3,8 % del total, y estos porcentajes son en promedio.

Todo esto da la pauta, que no conviene trabajar o usar la ecuación (64a), sino la ecuación (64), por su sencillez. Este valor de C_w , interviene en la determinación de la tensión crítica ideal de pandeo por torsión exclusivamente ($F_{cr,i,t}$ ó $\sigma_{cr,i,t}$), como también en pandeo por flexotorsión, ($F_{cr,i,ft}$ ó $\sigma_{cr,i,ft}$).

A la ecuación (64), se la puede presentar también como:

$$\begin{aligned}
 C_w &= (h_o/2)^2 J_y + (h_o/2)^2 A h_o e_1^2 + (h_o/2)^2 A e_1^2 + h_o e_1 J_y + h^2 A e_1^2 + \\
 &+ h_o A e_1^3 + J_y e_1^2 + A h_o e_1^3 + A e_1^4 + (2/3) b_i^3 t h_o^2 + (2/3) b_i^3 t 4 h_o e_1 + \\
 &+ (2/3) b_i^3 t 4 e_1^2 \quad (64b)
 \end{aligned}$$

Con esta ecuación (64b), tampoco conviene usar o trabajar, no es sencilla, pero sí para analizarla y sacar más conclusiones.

Todo este análisis hecho anteriormente, para secciones armadas con cuatro angulares, también es aplicable a otras secciones armadas, por ejemplo secciones armadas con dos perfiles U (canales) y las conclusiones anteriores también serían válidas, pero se vuelve a recordar que, es más cómodo usar ó trabajar con la ecuación (70b), que se verá más adelante.

Si no se conoce el valor exacto, y se toma el primer sumando de la ecuación (64a), menor que el real, al calcular las tensiones críticas ideales, este módulo de alabeo C_w , es nada más que un componente de la ecuación, ya sea en la ecuación de pandeo por torsión exclusivamente, o en la ecuación de pandeo por flexotorsión, estas tensiones ideales (numericamente), no difieren mucho, usando el primer sumando de la ecuación (64a) que es aproximado, ó el exacto de (64), que es el verdadero

Recordar que las tensiones críticas ideales tienen la expresión:

a) Para secciones doblemente simétricas o de simetría puntual:

$$F_c = \left[\frac{x^2 \cdot E \cdot C_w}{(k_z \cdot L)^2} + G \cdot J \right] \frac{1}{I_x + I_y}$$

b) Para secciones de simple simetría, donde el eje "y" es el de simetría

$$F_o = \frac{F_{eyL} + F_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot F_{eyL} \cdot F_{ez} \cdot H}{(F_{eyL} + F_{ez})^2}} \right]$$

c) Para secciones asimétricas, la tensión crítica ideal para pandeo flexotorsional F_e , es la menor de las raíces de la ecuación cúbica:

$$HF_e^3 + \left[(1/\bar{r}_o^2) (x_o^2 F_{eyi} + y_o^2 F_{ex}) - (F_{ex} + F_{eyi} + F_{et}) \right] F_e^2 + (F_{eyi} F_{ex} + F_{eyi} F_{et} + F_{ex} F_{et}) F_e - (F_{ex} F_{eyi} F_{et}) = 0$$

Con estas tensiones ideales, se está en condiciones de calcular la esbeltez de comparación:

$$\lambda_c = \sqrt{F_y / F_{cr,i,t}} \dots \dots \dots \chi \quad \text{ó} \quad \lambda_{c,ft} = \sqrt{F_y / F_{cr,i,ft}} \dots \dots \dots \chi$$

y luego las respectivas cargas críticas correspondientes.

5.3- Sección rectangular, formada por 4 perfiles angulares. La diferencia con el anterior, es que ahora la sección es rectangular, con cuatro angulares de alas iguales, figura 39. Tomando como inicio el punto 0, las coordenadas sectoriales serian:

- 0.- 0
- 1.- $\frac{h_2 b_1}{2}$
- 2.- $\frac{h_2 b_1}{2} + \frac{h_1 b_1}{2} = \frac{(h_1 + h_2) b_1}{2}$
- 3.- $\frac{(h_1 + h_2) b_1}{2} + \frac{h_1 c_1}{2} = \frac{h_1}{2} (b_1 + c_1) + \frac{h_2 b_1}{2}$
- 4.- $\frac{h_1}{2} (b_1 + c_1) + \frac{h_2}{2} b_1 + \frac{h_1}{2} b_1 = \frac{h_1}{2} (2 b_1 + c_1) + \frac{h_2}{2} b_1$
- 5.- $\frac{h_1}{2} (2 b_1 + c_1) + \frac{h_2}{2} b_1 + \frac{h_2}{2} b_1 = \frac{h_1}{2} (2 b_1 + c_1) + h_2 b_1$

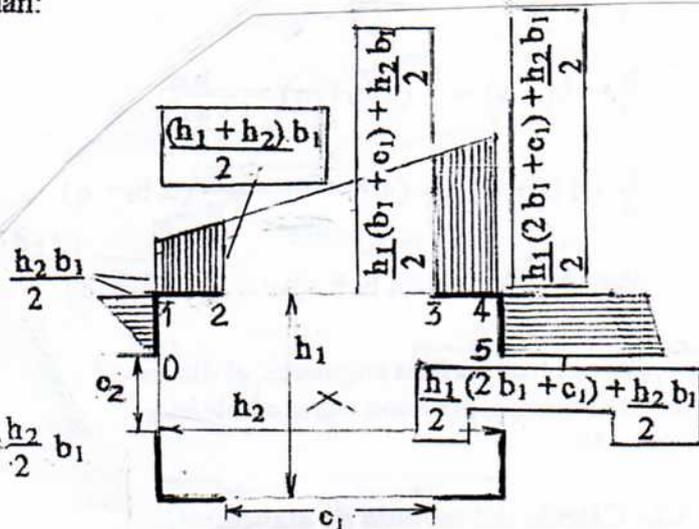


Figura 39

Cálculo de la función en 0:

$$1.- \frac{1}{2} \frac{h_2 b_1}{2} \cdot b_1 t = \frac{h_2 b_1}{4} \cdot b_1 t$$

$$2.- \frac{1}{2} \left[\frac{h_2 b_1}{2} + \frac{h_1 + h_2}{2} \right] b_1 t = \left[\frac{h_1 b_1}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} \right] b_1 t$$

$$3.- \frac{1}{2} \left[\frac{h_1(c_1 + b_1)}{2} + \frac{h_2 b_1}{2} + \frac{h_1(c_1 + 2 b_1)}{2} + \frac{h_2 b_1}{2} \right] b_1 t =$$

$$= \left[\frac{h_1(3 b_1 + 2 c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} \right] b_1 t$$

$$4.- \frac{1}{2} \left[\frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{2} + \frac{h_2 b_1}{2} + \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{2} + \frac{h_2 b_1}{2} \right] b_1 t =$$

$$= \left[\frac{h_1(4 b_1 + 2 c_1)}{4} + \frac{h_2 3 b_1}{4} \right] b_1 t$$

$$\sum = \left[\frac{h_1}{4} (b_1 + 3 b_1 + 2 c_1 + 4 b_1 + 2 c_1) + \frac{h_2}{4} (b_1 + 2 b_1 + 2 b_1 + 3 b_1) \right] b_1 t =$$

$$= \left[\frac{h_1(8 b_1 + 4 c_1)}{4} + \frac{h_2 8 b_1}{4} \right] b_1 t$$

$$\varphi = \left[\frac{h_1(8 b_1 + 4 c_1)}{4} + \frac{h_2 8 b_1}{4} \right] \frac{b_1 t}{4 b_1 t} = \frac{h_1(2 b_1 + c_1) + h_2 2 b_1}{4} \quad (65)$$

5.4- Verdaderas coordenadas sectoriales. Con este valor (65) en el origen 0, se obtienen los verdaderos valores de las coordenadas sectoriales, como se ve en figura 40:

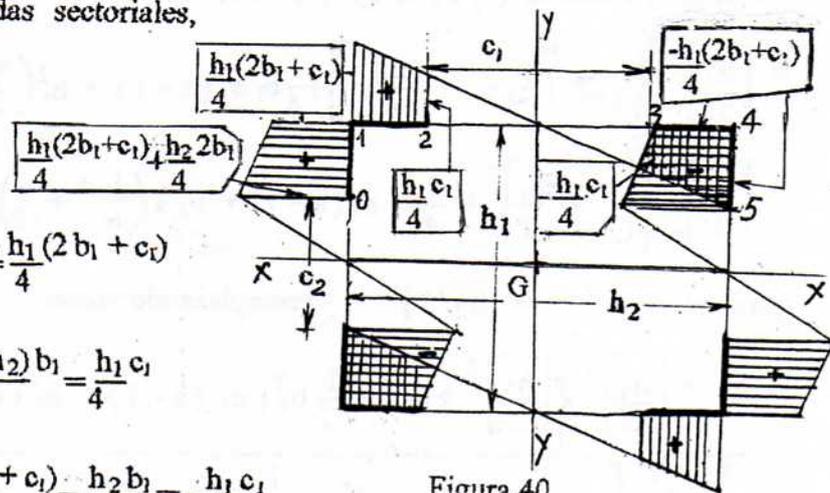


Figura 40

$$0.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4}$$

$$1.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} - \frac{h_2 b_1}{2} = \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4}$$

$$2.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} - \frac{(h_1 + h_2) b_1}{2} = \frac{h_1 c_1}{4}$$

$$3.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} - \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{2} - \frac{h_2 b_1}{2} = -\frac{h_1 c_1}{4}$$

$$4.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} - \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{2} - \frac{h_2 b_1}{2} = -\frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4}$$

$$5.) \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} + \frac{h_2 2 b_1}{4} - \frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{2} - \frac{h_2 b_1}{2} = -\frac{h_1(2 b_1 + c_1)}{4} - \frac{h_2 2 b_1}{4}$$

5.5- Cálculo del módulo de alabeo, de la sección rectangular. (4 angulares, alas iguales)

Tener presente que: $h_2 > h_1$ $\frac{h_2}{h_1} = a \therefore h_2 = h_1 a$

$$\begin{aligned}
 C_{w1} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) + \frac{h_2}{4} 2b_1 \right]^2 + \frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) \left[\frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) + \frac{h_2}{4} 2b_1 \right] + \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) \right]^2 \right\} b_1 t + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) \right]^2 + \frac{h_1}{4} (2b_1 + c_1) \frac{h_1}{4} c_1 + \left[\frac{h_1}{4} c_1 \right]^2 \right\} b_1 t = \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_1}{4} \right]^2 \cdot \left[4b_1^2 + 4b_1 c_1 + c_1^2 + 3(2b_1 + c_1) 2b_1 a + 4b_1^2 + 4b_1 c_1 + c_1^2 + 4b_1^2 + \right. \right. \\
 &+ \left. \left. 4b_1 c_1 + c_1^2 \right] b_1 t + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_1}{4} \right]^2 (4b_1^2 + 4b_1 c_1 + c_1^2 + 2b_1 c_1 + 2c_1^2) + \left[\frac{h_2}{4} \right]^2 4b_1^2 \right\} b_1 t \right\} \\
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_1}{4} \right]^2 \cdot (16b_1^2 + 18b_1 c_1 + 6c_1^2 + 12b_1^2 a + 6b_1 c_1 a) + \left(\frac{h_2}{4} \right)^2 4b_1^2 \right\} b_1 t = \\
 &= \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \left[\frac{4}{3} b_1^2 + \frac{3}{2} b_1 c_1 + \frac{c_1^2}{2} + b_1^2 a + \frac{b_1}{2} c_1 a + \frac{b_1^2 a^2}{3} \right] b_1 t = \\
 &= \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \left[\frac{2}{3} b_1^2 + \frac{3}{4} b_1 c_1 + \left(\frac{c_1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} b_1^2 a + \frac{1}{4} b_1 c_1 a + \frac{1}{6} b_1^2 a^2 \right] \cdot 2 b_1 t =
 \end{aligned}$$

Sumando y restando $(1/3) b_1^2$, y $(1/4) b_1 c_1$, queda:

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \left\{ \left[(b_1^2 + b_1 c_1 + \frac{c_1^2}{4}) + \frac{1}{4} b_1 c_1 (a-1) + b_1^2 \left(\frac{a}{2} + \frac{a^2}{6} - \frac{1}{3} \right) \right] 2 b_1 t = \right. \\
 &= \left. \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \left\{ \left[b_1 + \frac{c_1}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} b_1 c_1 (a-1) + b_1^2 a \left(\frac{1}{6} a + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} b_1^2 \right\} 2 b_1 t \right.
 \end{aligned}$$

pero $b_1 + (c_1/2) = [h_2/2]$ y reemplazando viene:

$$\begin{aligned}
 C_{w1} &= \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \cdot \left\{ \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 2 b_1 t + \frac{1}{2} b_1^2 t c_1 (a-1) + b_1^3 t a \left(\frac{1}{3} a + 1 \right) - \frac{2}{3} b_1^3 t \right\} = \\
 &= \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \cdot \left\{ J'_{y1} + \frac{1}{2} b_1^2 t c_1 (a-1) + b_1^3 t a \left(\frac{1}{3} a + 1 \right) - \frac{2}{3} b_1^3 t \right\} \quad (66a)
 \end{aligned}$$

J_{y1} = momento de inercia ficticio de un angular, con respecto al eje y-y baricentrico de la sección.

Pero todo esto es para un solo angular, por lo tanto se debe multiplicar por cuatro, y queda:

$$C_w = \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 \cdot \left[J'_y + 2 b_1^2 t c_1 (a-1) + 4 b_1^3 t a \left(\frac{1}{3} a + 1 \right) - \frac{8}{3} b_1^3 t \right] \quad (66b)$$

J'_y = momento de inercia total ficticio, con respecto al eje y-y, baricéntrico de los cuatro angulares.

$$(h_1/2) = (h_{o1}/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t/2) \quad (h_2/2) = (h_{o2}/2) + e_1$$

El estudio anterior se realizó, considerando que la acción de la torsión se distribuye en el mayor ancho de la sección; ¿pero que pasa si la acción de la torsión se distribuye en el menor ancho de la sección? ¿el módulo de alabeo puede variar un poco su valor? El estudio se realiza a continuación, analizando en el ancho mas corto de la sección.

5.6- Sección rectangular, formada por 4 perfiles angulares de alas iguales. Se calculan directamente las verdaderas coordenadas sectoriales, pues se conoce el punto de partida, que es el punto sectorial principal (c.s. nula), y se ubica en el punto medio, entre dos angulares (figura 41).

0.- 0

$$1.- \frac{h_2 c_2}{2} = \frac{h_2 c_2}{4}$$

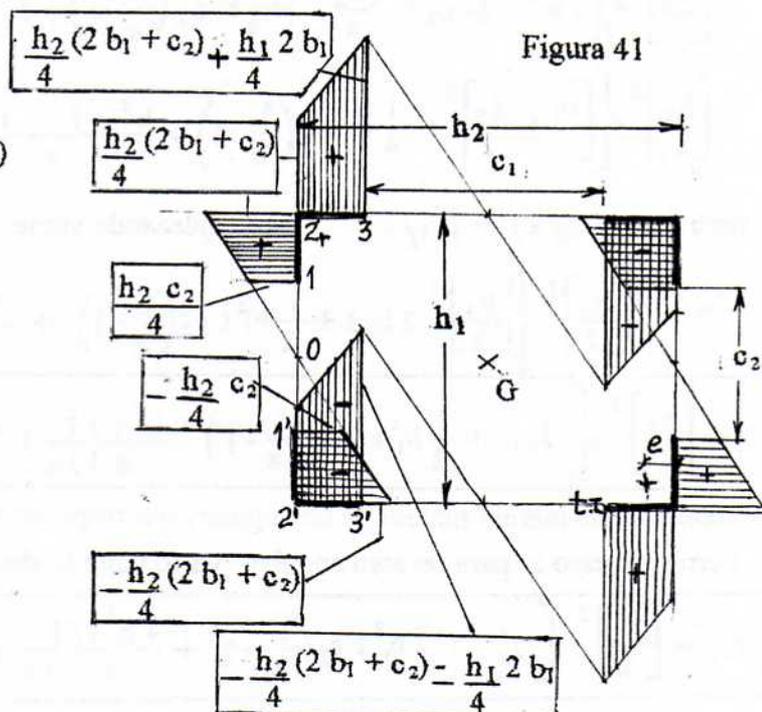
$$2.- \frac{h_2 c_2}{4} + \frac{h_2 b_1}{2} = \frac{h_2 (2 b_1 + c_2)}{4}$$

$$3.- \frac{h_2 (2 b_1 + c_2)}{4} + \frac{h_1 2 b_1}{4}$$

$$1'.- \frac{h_2 c_2}{4}$$

$$2'.- \frac{h_2 (2 b_1 + c_2)}{4}$$

$$3'.- \frac{h_2 (2 b_1 + c_2)}{4} - \frac{h_1 2 b_1}{4}$$



5.7.- Cálculo del módulo de alabeo, de la sección rectangular. (4 angulares, alas iguales)

Tener presente que: $h_2 > h_1$ $\frac{h_2}{h_1} = a \therefore h_2 = h_1 a$

$$C_{w1} = \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) + \frac{h_1}{4} 2 b_1 \right]^2 + \frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) \left[\frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) + \frac{h_1}{4} 2 b_1 \right] + \left[\frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) \right]^2 \right\} b_1 t + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) \right]^2 + \frac{h_2}{4} (2 b_1 + c_2) \frac{h_2}{4} c_2 + \left[\frac{h_2}{4} c_2 \right]^2 \right\} b_1 t =$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_2}{4} \right]^2 \cdot \left[4 b_1^2 + 4 b_1 c_2 + c_2^2 + 3 (2 b_1 + c_2) \frac{2 b_1}{a} + 4 b_1^2 + 4 b_1 c_2 + c_2^2 + 4 b_1^2 + 4 b_1 c_2 + c_2^2 \right] b_1 t + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_2}{4} \right]^2 (4 b_1^2 + 4 b_1 c_2 + c_2^2 + 2 b_1 c_2 + 2 c_2^2) + \left[\frac{h_1}{4} \right]^2 4 b_1^2 \right\} b_1 t \right.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_2}{4} \right]^2 \cdot (16 b_1^2 + 18 b_1 c_2 + 6 c_2^2 + 12 b_1^2 \frac{1}{a} + 6 b_1 c_2 \frac{1}{a}) + \left(\frac{h_1}{4} \right)^2 4 b_1^2 \right\} b_1 t = \\
 &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \left[\frac{4}{3} b_1^2 + \frac{3}{2} b_1 c_2 + \frac{c_2^2}{2} + b_1^2 \frac{1}{a} + \frac{b_1}{2} c_2 \frac{1}{a} + \frac{b_1^2}{3 a^2} \right] b_1 t = \\
 &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \left[\frac{2}{3} b_1^2 + \frac{3}{4} b_1 c_2 + \left(\frac{c_2}{2} \right)^2 + \frac{1 b_1^2}{2 a} + \frac{1 b_1 c_2}{4 a} + \frac{1 b_1^2}{6 a^2} \right] 2 b_1 t =
 \end{aligned}$$

Sumando y restando $(1/3) b_1^2$, y $(1/4) b_1 c_2$, queda:

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \left\{ \left[(b_1^2 + b_1 c_2 + \frac{c_2^2}{4}) \right] + \frac{1}{4} b_1 c_2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + b_1^2 \left[\frac{1}{2 a} + \frac{1}{6 a^2} - \frac{1}{3} \right] \right\} 2 b_1 t = \\
 &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \left\{ \left[b_1 + \frac{c_2}{2} \right]^2 + \frac{1}{4} b_1 c_2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{b^2}{a} \left(\frac{1}{6 a} - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} b_1^2 \right\} 2 b_1 t
 \end{aligned}$$

pero $b_1 + (c_2/2) = [h_1/2]$ y reemplazando viene:

$$\begin{aligned}
 C_{w1} &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \cdot \left\{ \left[\frac{h_1}{2} \right]^2 2 b_1 t + \frac{1}{2} b_1^2 t c_2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{b^3 t}{a} \left(\frac{1}{3 a} + 1 \right) - \frac{2}{3} b_1^3 t \right\} = \\
 &= \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \left\{ J'_{x1} + \frac{1}{2} b_1^2 t c_2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{b^3 t}{a} \left(\frac{1}{3 a} + 1 \right) - \frac{2}{3} b_1^3 t \right\} \quad (67a)
 \end{aligned}$$

J'_{x1} = momento de inercia ficticio de un angular, con respecto al eje x-x baricéntrico de la sección.

Pero todo esto es para un solo angular, por lo tanto se debe multiplicar por cuatro, y queda:

$$C_w = \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 \cdot \left[J'_x + 2 b_1^2 t c_2 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) + \frac{4 b_1^3 t}{a} \left(\frac{1}{3 a} + 1 \right) - \frac{8}{3} b_1^3 t \right] \quad (67b)$$

J_x = momento de inercia total ficticio, con respecto al eje x-x baricéntrico, de los cuatro angulares.

$$h_1/2 = (h_{o1}/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t/2) \quad h_2/2 = (h_{o2}/2) + e_1$$

Analizando la ecuación (66), cuando $h_1 = h_2$, la relación a es la unidad, obteniéndose nuevamente la ecuación (64), y no se puede analizar el caso en que $h_1 = 0$, pues ello no es posible, comenzando a disminuir de h_1 , se llega a un valor mínimo que es $h_1 = 2 b_1$ y $c_2 = 0$, obteniéndose un par de secciones canales enfrentadas y cortadas por la mitad y con una separación h_2 , como se ve en figura 42, y entonces la ecuación (66) quedaría

$$C_{w1} = \left[b_1^2 \right] \left\{ \left[\frac{h_2}{2} \right]^2 2 b_1 t + \frac{1}{2} b_1^2 t c_1 (a - 1) + b_1^3 t a \left(\frac{1}{3} + 1 \right) - \frac{2}{3} b_1^3 t \right\} \quad (68)$$

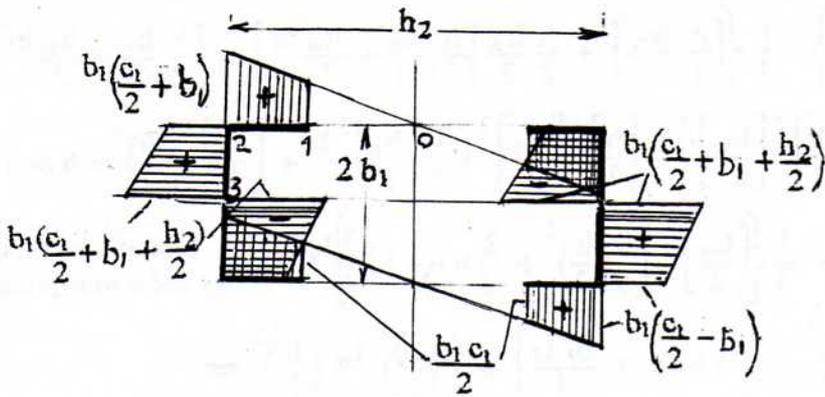


Figura 42

J_{y1} = momento de inercia ficticio de un angular, con respecto al eje y-y, baricéntrico de la sección total.

Pero todo esto es para un solo angular, y por lo tanto se debe multiplicar por cuatro, y viene:

$$C_w = [b_1]^2 \left[J'_y + 2b^2 t c_1 (a-1) + 4b_1^3 a \left(\frac{1}{3} a + 1 \right) - \frac{8}{3} b_1^3 t \right] \quad (69)$$

J_y = momento de inercia total ficticio, con respecto al eje y-y, baricéntrico de los cuatro angulares.

6.- Sección armada, formada por dos perfiles U (canal). Como se conoce el punto principal (c.s. nula), que se encuentra en el punto medio del alma, se calculan directamente las verdaderas coordenadas sectoriales, figura 43.

- 0) 0 1) $\frac{h_w h}{4}$ 2) $\frac{h_w}{2} \left(\frac{h}{2} + b_1 \right)$ 1) $-\frac{h_w h}{4}$ 2) $-\frac{h_w}{2} \left(\frac{h}{2} + b_1 \right)$

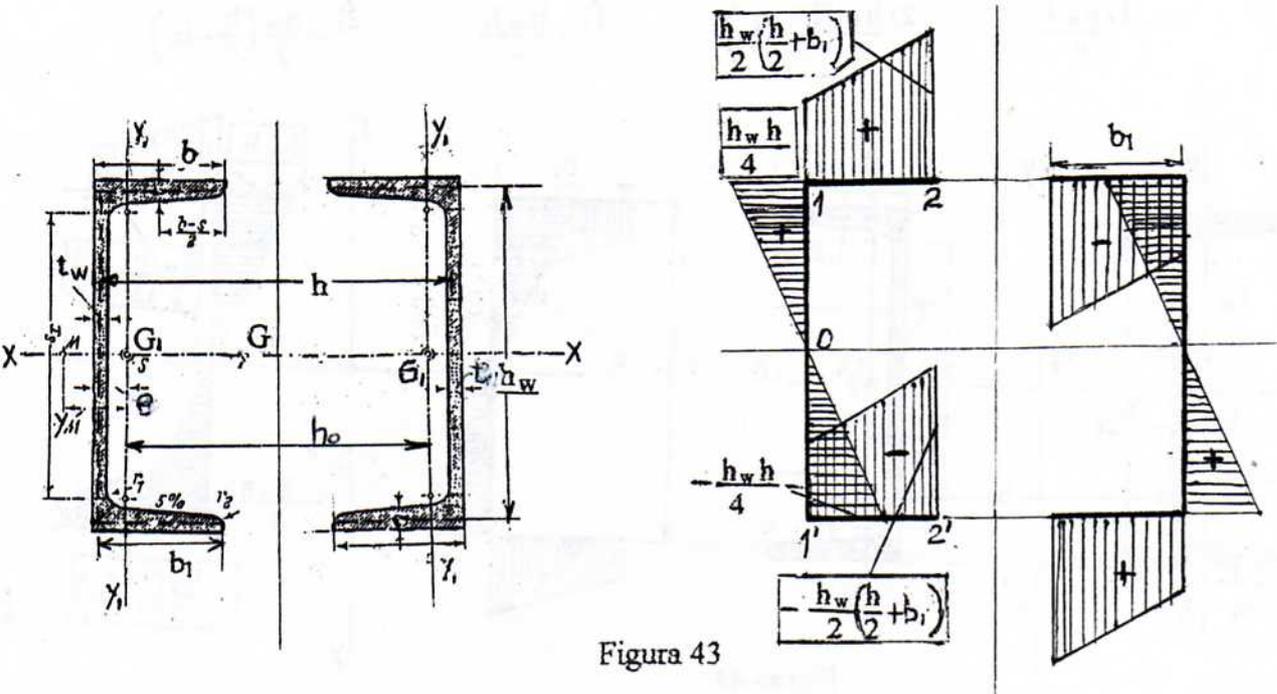


Figura 43

6.1- Cálculo del módulo de alabeo, de la sección armada con los perfiles U (canales).

$$\begin{aligned}
 C'_{w1} &= \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{h_w}{2} \right]^2 \frac{h_w t_w}{2} \right\} + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{h_w}{2} \right]^2 + \frac{h}{2} \frac{h_w}{2} \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{h_w}{2} + \frac{h_w b_1}{2} \right] + \left[\frac{h}{2} \frac{h_w}{2} + \frac{h_w b_1}{2} \right]^2 \right\} b_1 t_f \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{h}{2} \cdot \frac{h_w}{2} \right]^2 \frac{h_w t_w}{2} + \frac{1}{3} \left[\frac{h}{2} \right]^2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 + \left[\frac{h}{2} \right]^2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 + \frac{h}{2} \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 b_1 + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 + h b_1 + b_1^2 \right] b_1 t_f \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{(h_w)^3}{4} \frac{t_w}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} h b_1 + b_1^2 \right] \right\} b_1 t_f \quad (\text{alabeo de } \frac{1}{2} \text{ perfil, se debe multiplicar por 2}) \\
 C_{w1} &= 2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[b_1 t_f \left(\frac{h}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} h b_1^2 t_f + \frac{b_1^3 t_f}{3} \right] + \frac{(h_w)^3}{12} t_w \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \\
 C_{w1} &= \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[\frac{h}{2} \right]^2 2 b_1 t_f + \left(\frac{h_w}{12} \right)^3 t_w \left(\frac{h}{2} \right)^2 + 2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[\frac{1}{2} h b_1^2 t_f + \frac{b_1^3 t_f}{3} \right] = \\
 &= \left[\frac{h}{2} \right]^2 \left[\left(\frac{h_w}{2} \right)^2 2 b_1 t_f + \left(\frac{h_w}{12} \right)^3 t_w \right] + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[h b_1^2 t_f + \frac{2}{3} b_1^3 t_f \right] = \\
 &= \left[\frac{h}{2} \right]^2 J_{x1} + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[h b_1^2 t_f + \frac{2}{3} b_1^3 t_f \right] \quad (70a) \quad J_{x1} = \left[\left(\frac{h_w}{2} \right)^2 2 b_1 t_f + \frac{(h_w)^3}{12} t_w \right]
 \end{aligned}$$

J_{x1} = momento de inercia de un perfil U, con respecto al eje baricentrico de la sección total x-x.

Como son dos perfiles, se debe multiplicar todo por 2, y queda:

$$C_w = \left[\frac{h}{2} \right]^2 J_x + 2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[h b_1^2 t_f + \frac{2}{3} b_1^3 t_f \right] \quad (70b) \quad h/2 = (h_o/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t_w/2)$$

J_x = momento de inercia de los perfiles U, con respecto al eje baricéntrico de la sección total x-x.

6.2- La sección armada con los dos perfiles U, tienen ahora las alas en dirección contraria al centro de la sección, como se ve en figura 44, las coordenadas sectoriales son algo diferente:

- 0) 0 1) $\frac{h_w h}{4}$ 2) $\frac{h_w}{2} \left(\frac{h}{2} - b_1 \right)$ 1') $-\frac{h_w h}{4}$ 2') $-\frac{h_w}{2} \left(\frac{h}{2} - b_1 \right)$

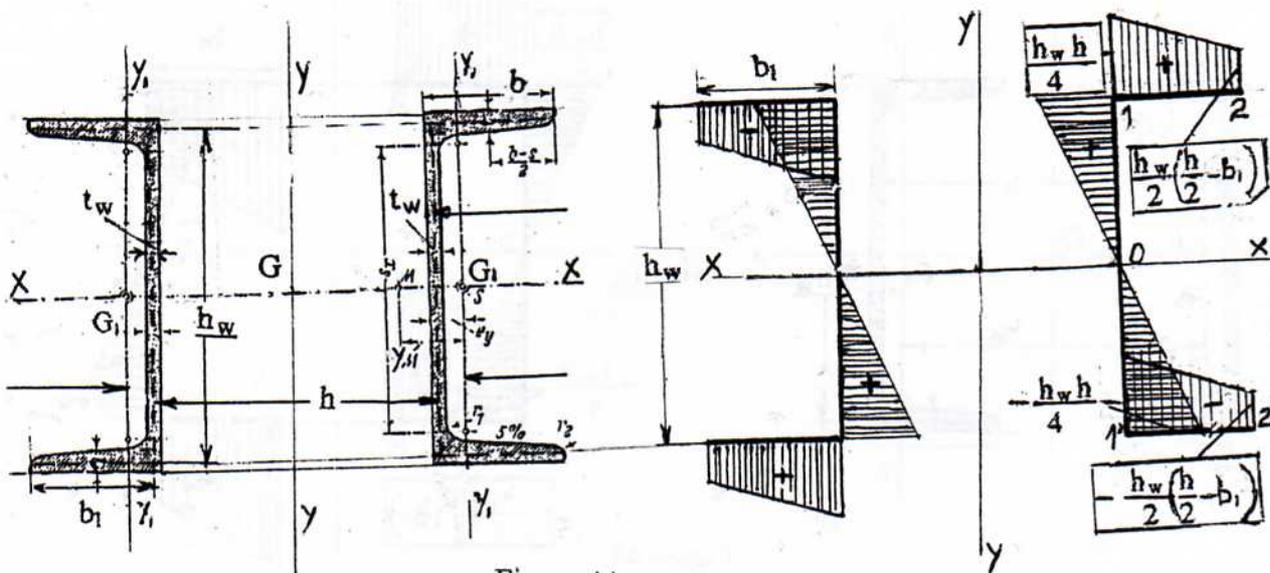


Figura 44

6.3 – Cálculo del módulo de alabeo, de la sección armada con dos perfiles U (canales).

Procediendo en la misma forma anterior, se llega a la siguiente ecuación:

$$C_{w1} = \left[\frac{h}{2} \right]^2 J_{x1} + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[-h b_i^2 t_f + \frac{2}{3} b_i^3 t_f \right] \quad (71a) \quad J_{x1} = \left[\left(\frac{h_w}{2} \right)^2 2 b_i t_f + \left(\frac{h_w}{12} \right)^3 t_w \right]$$

$$C_w = \left[\frac{h}{2} \right]^2 J_x + 2 \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[-h b_i^2 t_f + \frac{2}{3} b_i^3 t_f \right] \quad (71b) \quad h/2 = (h_o/2) + e_1 \quad e_1 = (e - t_w/2)$$

Comparando las ecuaciones (70b) y (71b), puede observarse, que su expresión matemática es similar, pero el sumando del segundo corchete de (71b) tiene signo negativo, y por lo tanto el valor numérico final del módulo de alabeo C_w de ecuación (71b) será menor que el de (70b), lo que significa que la disposición de las alas en dirección al centro (figura 43), o en dirección contraria (figura 44); tiene influencia en el resultado, es mayor el valor de C_w , cuando las alas están en la dirección del centro (figura 43).

Las ecuaciones (70b) y (71b), ambas tienen el segundo miembro similar. Analizando un solo perfil laminado U (canal), figura 45, y con el mismo razonamiento anterior se llega a:

$$C_{w1} = \left[Y_M' \right]^2 \left[\left(\frac{h_w}{2} \right)^2 2 b t_f + \left(\frac{h_w}{12} \right)^3 t_w \right] + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[-2 Y_M' b^2 t_f + \frac{2}{3} b^3 t_f \right] =$$

$$= \left[Y_M \right]^2 J_{x1} + \left[\frac{h_w}{2} \right]^2 \left[-2 Y_M b^2 t_f + \frac{2}{3} b^3 t_f \right] \quad (72) \quad J_{x1} = \left[\left(\frac{h_w}{2} \right)^2 2 b t_f + \left(\frac{h_w}{12} \right)^3 t_w \right]$$

$$Y_M' = (Y_M - e + t_w/2)$$

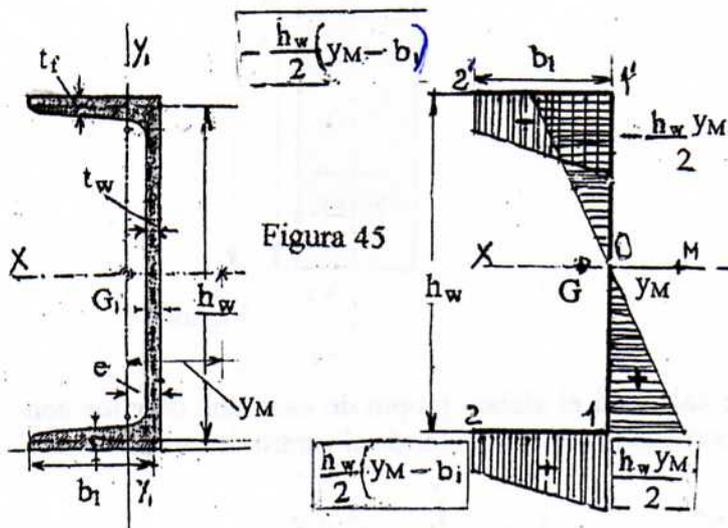


Figura 45

- 0) 0
- 1) $\frac{h_w Y_M}{2}$
- 2) $\frac{h_w}{2} (Y_M - b_i)$
- 1') $-\frac{h_w Y_M}{2}$
- 2') $-\frac{h_w}{2} (Y_M - b_i)$

- Verdaderas coordenadas sectoriales.

Pero en este caso el perfil gira alrededor de su centro de torsión Y_M con respecto al centro de gravedad, en cambio cuando son dos perfiles iguales unidos (con presillas o diagonales), el centro de torsión coincide con el centro de gravedad de la sección total, y la coordenada del centro de torsión es $[(h/2) + e - (t_w/2)]$ respecto del centro de gravedad de cada perfil. Si en un perfil U el centro de giro es $[(h/2) + e - (t_w/2)]$, (giro forzado), en la ecuación (72) lo que cambia es (Y_M) por $(h/2)$.

Entonces, en ecuaciones (70a) y (71a) el segundo sumando de C_w , corresponde al giro de un perfil con centro de torsión en $[(h/2) + e - t_w/2]$, y el primer sumando, al alabeo de la sección total del perfil, este segundo sumando tiene poca importancia y generalmente se lo desprecia.

Faltaría sumar a todo esto, los alabeos propios de cada componente del perfil, de sus alas y sus almas, que en la mayoría de los casos son despreciables, es decir a un perfil faltaría el alabeo propio de las dos alas ($b^3 t^3 / 18$), y al alma ($t^3 h_w / 144$), pero como es para un solo perfil, se debe multiplicar por 2. (Ver "Torsión no uniforme" del autor 2.005, páginas 23, 24 y 25)

7.- Sección armada con dos perfiles angulares, espalda con espalda, de alas iguales unidos con presillas. En estas secciones se conoce la posición del centro de torsión, éste se ubica en el encuentro del espesor medio de las alas verticales, y el espesor medio de las presillas, como puede verse en figura 46.

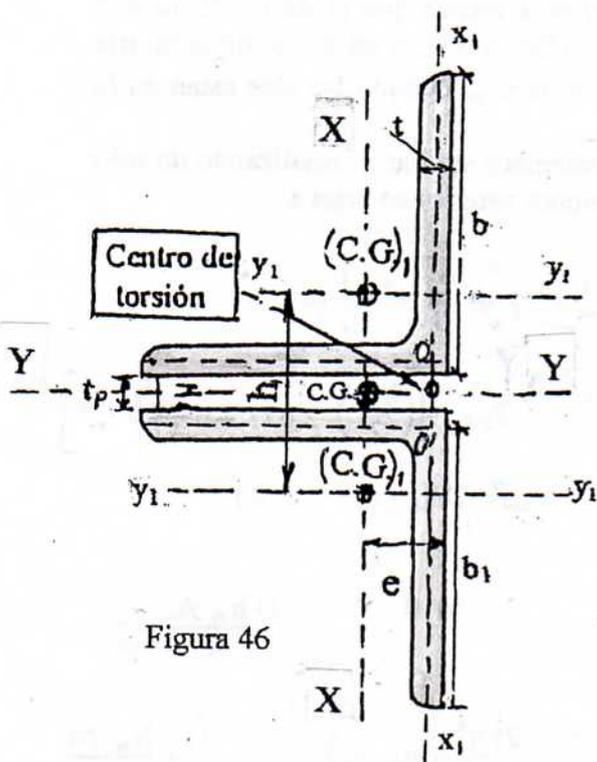


Figura 46

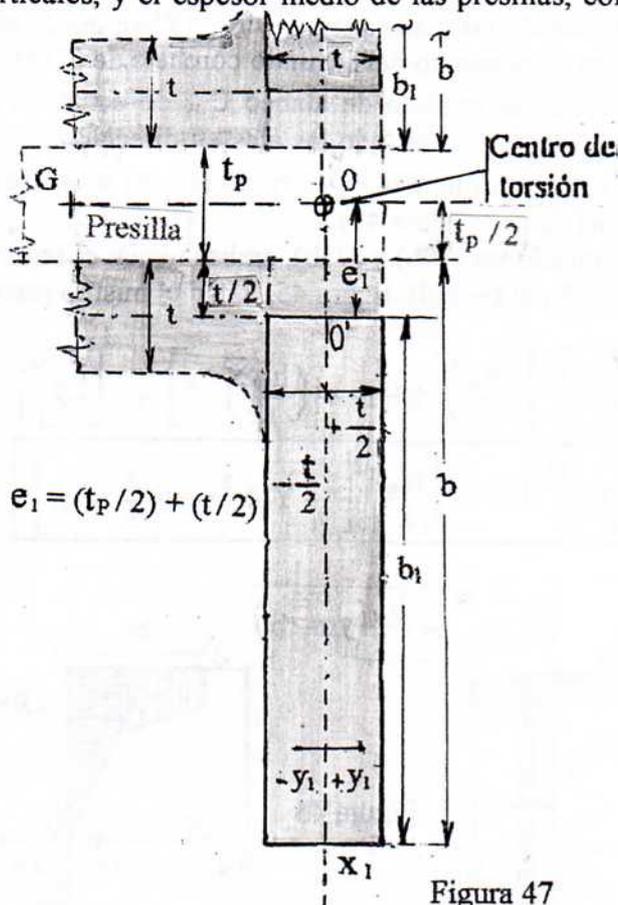


Figura 47

Tomando primero las alas verticales, se calculará el alabeo propio de cada uno de ellos con respecto al centro de torsión, figura 47. La coordenada sectorial referida al centro de torsión será:

$$\varphi_M = x_1(\pm y_1) \quad (\varphi_M)^2 = x_1^2 y_1^2 \quad C_w = \int (\varphi_M)^2 dF$$

$$C'_{w1} = \int [(x_1)^2 y_1^2] dx_1 dy_1 = \int_e^{e+b_1} x_1^2 dx_1 \cdot 2 \int_0^{t/2} y_1^2 dy_1 = \frac{1}{3} \left| x_1^3 \right|_e^{e+b_1} \cdot \frac{2}{3} \left| y_1^3 \right|_0^{t/2} =$$

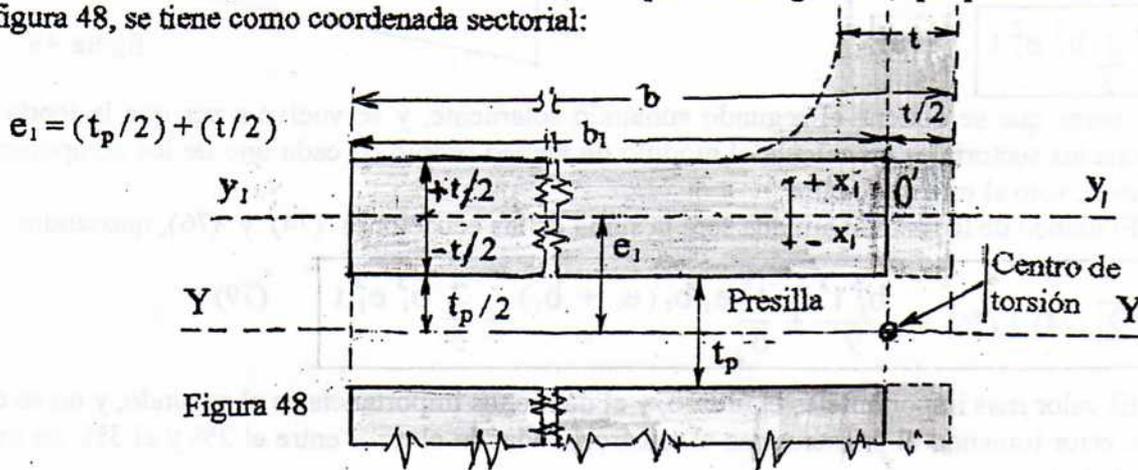
$$= \frac{1}{3} \left[(e+b_1)^3 - e^3 \right] \frac{2}{3} \cdot \frac{t^3}{8} = \frac{b_1^3 t^3}{36} + \frac{t^3}{12} e_1 b_1 (e_1 + b_1) \quad (73)$$

pero esto es para una sola ala, se debe multiplicar por 2, y viene:

$$C_{w1} = \frac{t^3 b_1^3}{18} + \frac{t^3 e_1 b_1 (e_1 + b_1)}{6} \quad (74)$$

El primer sumando es el módulo de alabeo propio de las dos alas, con respecto al centro de torsión propio de cada una de ellas, y el segundo es el alabeo de las dos alas con respecto al centro de torsión de la sección armada.

Falta todavía determinar, el módulo de alabeo de las dos alas horizontales, con respecto a centro de torsión, y analizando una de ellas, la superior de figura 46, que puede verse ampliada en figura 48, se tiene como coordenada sectorial:



$$\phi_M = (e_1 + x_1) y_1 \quad (\phi_M)^2 = (e_1 + x_1)^2 y_1^2 \quad C_w = \int (\phi_M)^2 dF$$

$$C_{w2} = \int (e_1 + x_1)^2 y_1^2 dx_1 dy_1 = \int (e_1^2 + 2 e_1 x_1 + x_1^2) y_1^2 dx_1 dy_1$$

$$\int_0^{b_1} (y_1^2) dy_1 = \left| \frac{y_1^3}{3} \right|_0^{b_1} = \frac{b_1^3}{3}$$

$$\int (e_1 + x_1)^2 dx_1 = \int (e_1^2 + 2 e_1 x_1 + x_1^2) dx_1 = 2 \int_0^{t/2} e_1^2 dx_1 + 2 \int_0^{t/2} x_1^2 dx_1 = 2 e_1^2 \left| x_1 \right|_0^{t/2} +$$

$$+ \frac{2}{3} \left| x_1^3 \right|_0^{t/2} = e_1^2 t + \frac{t^3}{12}$$

$$C'_{w2} = \frac{b_1^3}{3} \left| e_1^2 t + \frac{t^3}{12} \right| = \frac{b_1^3 t^3}{36} + \frac{b_1^3 e_1^2 t}{3} \quad (75)$$

Como son dos alas se debe multiplicar por dos, y queda :

$$C_{w2} = \frac{b_1^3 t^3}{18} + \frac{2}{3} b_1^3 e_1^2 t \quad (76)$$

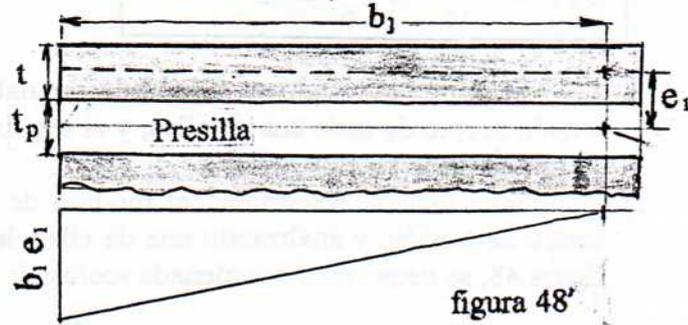
Si se ubiese calculado por el método de las coordenadas sectoriales, como se conoce el centro de torsión, el cálculo vendría de la siguiente manera: (ver figura 48 y 48')

0) 0 1) $b_1 e_1$ y son las coordenadas sectoriales verdaderas.

$$C_w = \frac{1}{3} \left| b_1 e_1 \right|^2 b_1 t = \frac{1}{3} b_1^3 e_1^2 t \quad (77)$$

Multiplicando por dos:

$$C_w = \frac{2}{3} b_1^3 e_1^2 t \quad (78)$$



puede verse que se obtiene el segundo sumando solamente, y se vuelve a ver que la teoría de las coordenadas sectoriales no calcula el módulo de alabeo propio de cada uno de los componentes de la sección, solo el mayor de ellos.

El alabeo de la sección armada será la suma de las ecuaciones (74) y (76), quedando:

$$C_w = \sum (74) + (76) = \frac{b_1^3 t^3}{9} + \frac{t^3 e_1 b_1 (e_1 + b_1)}{6} + \frac{2}{3} b_1^3 e_1^2 t \quad (79)$$

El valor mas importante es el último, y el de menos importancia es el segundo, y no se comete mucho error tomando el primero mas el tercero, rondando el error entre el 2% y el 3%, en menos y se puede tomar:

$$C_w = \frac{b_1^3 t^3}{9} + \frac{2}{3} b_1^3 t e_1^2 \quad (80)$$

El segundo sumando es, el momento de inercia de dos de sus alas con respecto a su base menor.

8.- Sección armada, formada por dos perfiles angulares, de alas iguales en cruz, unidos con presillas. En esta sección tambien se conoce el centro de torsión, que coincide con el centro de gravedad de la sección, como se ve en figura 49. Tomando el ala superior vertical, figura 50, se tiene que: la coordenada sectorial es:

$$\varphi_M = (e_1 \pm x_1) y_1 \quad (\varphi_M)^2 = (e_1 \pm x_1)^2 y_1^2 \quad C_w = \int (\varphi_M)^2 dF$$

$$C_{w1} = \int (e_1 \pm x_1)^2 y_1^2 dx_1 dy_1 = \int (e_1^2 \pm 2 e_1 x_1 + x_1^2) y_1^2 dx_1 dy_1 \quad \text{el segundo sumando es nulo}$$

$$\int_{e_1}^{e_1+b_1} y_1^2 dy_1 = \frac{1}{3} \left| y_1^3 \right|_{e_1}^{e_1+b_1} = \frac{1}{3} \left| (e_1 + b_1)^3 - e_1^3 \right| = \left| e_1^2 b_1 + e_1 b_1^2 + \frac{b_1^3}{3} \right| \quad (81)$$

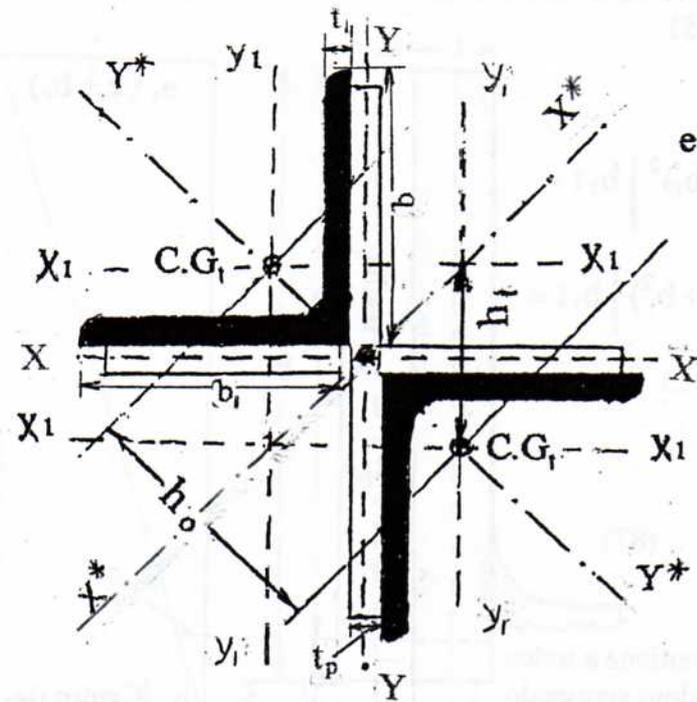


Figura 49

$$e_1 = (t_p/2) + (t/2)$$

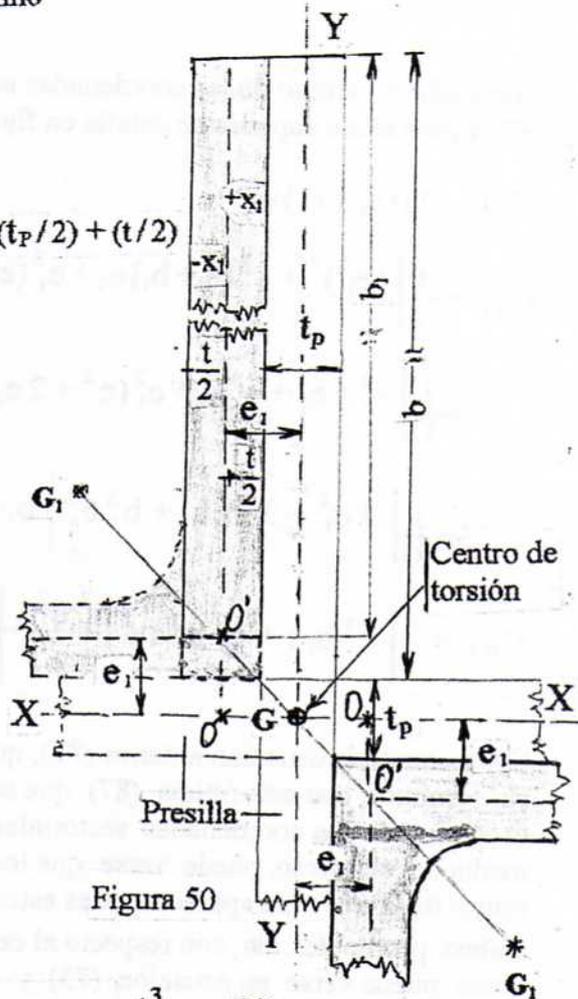


Figura 50

$$2 \int_0^{t/2} (e_1^2 + x_1^2) dx_1 = 2 e_1^2 \left| x_1 \right|_0^{t/2} + \frac{2}{3} \left| x_1^3 \right|_0^{t/2} = e_1^2 t + \frac{t^3}{12} \quad (82)$$

El módulo de alabeo, será el producto de las ecuaciones (81) y (82):

$$C_{w1} = \left| e_1^2 b_1 + e_1 b^2 + \frac{b_1^3}{3} \right| \left| e_1^2 t + \frac{t^3}{12} \right| = \frac{b_1^3 t^3}{36} + \frac{t^3}{12} e_1 b_1^2 + \frac{t^3}{12} e_1^2 b_1 + e^4 b_1 t + e_1^3 b_1^2 t + \frac{b_1^3 t e_1^2}{3} \quad (83)$$

y esto es para una sola ala, por lo tanto se debe multiplicar por cuatro, pues con las otras tres ocurre exactamente lo mismo.

$$C_w = \frac{b_1^3 t^3}{9} + \frac{t^3}{3} e_1 b_1^2 + \frac{t^3}{3} e_1^2 b_1 + 4(e_1^4 b_1 t + e_1^3 b_1^2 t + \frac{b_1^3 t e_1^2}{3}) \quad (84)$$

que también se la puede presentar, factorizando, de la siguiente forma:

$$C_w = \frac{b_1^3 t^3}{9} + \frac{t^3}{3} e_1 b_1 (e_1 + b_1) + 4 e_1^2 b_1 t (e_1^2 + e_1 b_1 + \frac{b_1^2}{3}) \quad (85)$$

En ecuación (83), (84) y (85), el término de mayor valor y el más importante es el último y siguiendo en importancia el penúltimo, y se puede tomar, cometiendo error en 4%, en menos:

$$C_w = \frac{b_1^3 t^3}{9} + 4 e_1^3 b_1^2 t + \frac{4}{3} b_1^3 e_1^2 t = \frac{b_1^3 t^3}{9} + 4 e_1^2 b_1^2 t \left(e_1 + \frac{b_1}{3} \right) \quad (86)$$

Siguiendo el camino de las coordenadas sectoriales, se ubiese llegado a lo siguiente, (ver figura 49 y 50), y para el ala superior se detalla en figura 51:

0) 0 1) $(e_1 + b_1) e_1$

$$C_{w1} = \frac{1}{3} \left| (e_1^2)^2 + e_1^2 (e_1 + b_1) e_1 + e_1^2 (e_1 + b_1)^2 \right| b_1 t =$$

$$= \frac{1}{3} \left| e_1^4 + e_1^4 + e_1^3 b_1 + e_1^2 (e_1^2 + 2 e_1 b_1 + b_1^2) \right| b_1 t =$$

$$= \frac{1}{3} \left| 3 e_1^4 + 3 e_1^3 b_1 + b_1^2 e_1^2 \right| b_1 t \dots$$

$$C_{w1} = \left| e_1^4 b_1 t + e_1^3 b_1^2 t + \frac{b_1^3 e_1^2 t}{3} \right| \quad (87)$$

Comparando la ecuación anterior (83), que contiene a todos sus términos, con esta última (87) que se dedujo siguiendo el camino de las coordenadas sectoriales, tomando la línea media del elemento, puede verse que los tres primeros términos de la (83) no aparecen, pues estos corresponden al alabeo propio del ala, con respecto al centro de torsión O , como puede verse en ecuación (73) y figura 47, pero si, aparecen los tres últimos de la (83), volviéndose a repetir aquí que: "la teoría de las coordenadas sectoriales, como

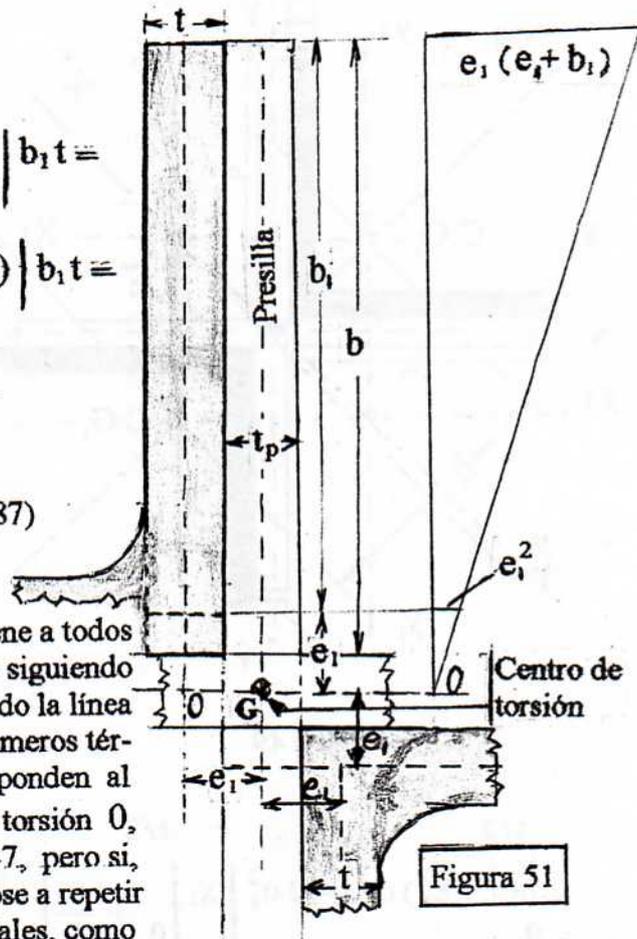
toma la línea media del elemento, no contempla, en la deducción del valor del módulo de alabeo, los alabeos propios de cada elemento componente de la sección. Analizando la figura 47, si se quiere aplicar la teoría de las coordenadas sectoriales al ala vertical inferior, con centro de torsión O , estas serían nulas; únicamente contempla valores cuando el centro de torsión está afuera de la línea media del elemento, como se ve en figura 48 y 48'.

La ecuación (87) es válida para una sola ala, por lo tanto se debe multiplicar por cuatro, y queda:

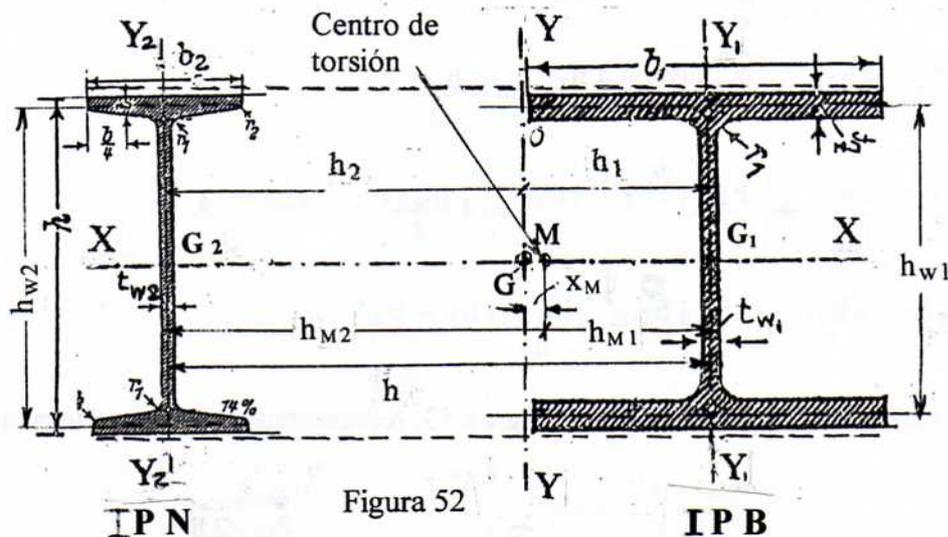
$$C_w = 4 \left| e_1^4 b_1 t + e_1^3 b_1^2 t + \frac{b_1^3 e_1^2 t}{3} \right| = 4 e_1^2 b_1 t \left(e_1^2 + e_1 b_1 + \frac{b_1^2}{3} \right) \quad (88)$$

Llegándose al tercer término de la ecuación (85), y los términos que tienen mayor valor, del parentesis, son el primero y el tercero, y se puede decir que en este caso, no se comete mucho error con respecto a la ecuación (88) despreciando el primer sumando del paréntesis, quedando:

$$C_w = 4 e_1^2 b_1^2 t \left(e_1 + \frac{b_1}{3} \right) \quad (89) \text{ igual que el último sumando de ecuación (86)}$$



9.- Dos perfiles doble te, doblemente simétricos, uno grey de alas anchas, y el otro un perfil normal de alas angostas (PNI), unidos por diagonales, como se ve en figura 52. En este tipo de secciones se debe calcular el centro de torsión (ver publicación del autor "Torsión no uniforme, pandeo por torsión y flexotorsión en barras de alma llena", del 2.005, pág. 15, y pág. 49 del apéndice). Se deben calcular las verdaderas coordenadas sectoriales, tomando primeramente el baricentro como centro de torsión, y en función de estas coordenadas, sumadas algebraicamente, se calcula el momento estático sectorial lineal R_x , y dividiendolo por el momento de inercia con respecto al eje x , J_x , se obtiene como resultado la distancia del centro de torsión, al baricentro de la sección total, con el signo correspondiente.



A continuación se calculan esas coordenadas sectoriales, para los dos perfiles:

9.1- Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales, referidas al baricentro, perfil doble te de alas anchas.

$$0.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1)$$

$$1.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1) - \frac{h_{w1}}{4} b_1 = \frac{h_{w1}}{4} 2 h_1$$

$$2.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1) - \frac{h_{w1}}{4} 2 b_1 = \frac{h_{w1}}{4} (2 h_1 - b_1)$$

$$3.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1) - \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 4 h_1) = - \frac{h_{w1}}{4} 2 h_1$$

$$4.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1) - \frac{h_{w1}}{4} (2 b_1 + 4 h_1) = - \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1)$$

$$5.- \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_1) - \frac{h_{w1}}{4} h_1 = - \frac{h_{w1}}{4} (2 h_1 - b_1)$$

9.2- Cálculo de las verdaderas coordenadas sectoriales, referidas al baricentro, perfil doble te de alas angostas (P N I).

$$0'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4}$$

$$1'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4} + \frac{h_{w2}b_2}{4} = - \frac{h_{w2}h_2}{2}$$

$$2'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4} + \frac{h_{w2}2b_2}{4} = - \frac{h_{w2}(2h_2 - b_2)}{4}$$

$$3'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4} + \frac{h_{w2}(b_2 + 4h_2)}{4} = + \frac{h_{w2}h_2}{2}$$

$$4'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4} + \frac{h_{w2}(2b_2 + 4h_2)}{4} = + \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4}$$

$$5'. - \frac{h_{w2}(b_2 + 2h_2)}{4} + h_{w2}h_2 = + \frac{h_{w2}(2h_2 - b_2)}{4}$$

Pueden verse en el siguiente esquema, figura 53, representadas estas coordenadas sectoriales.

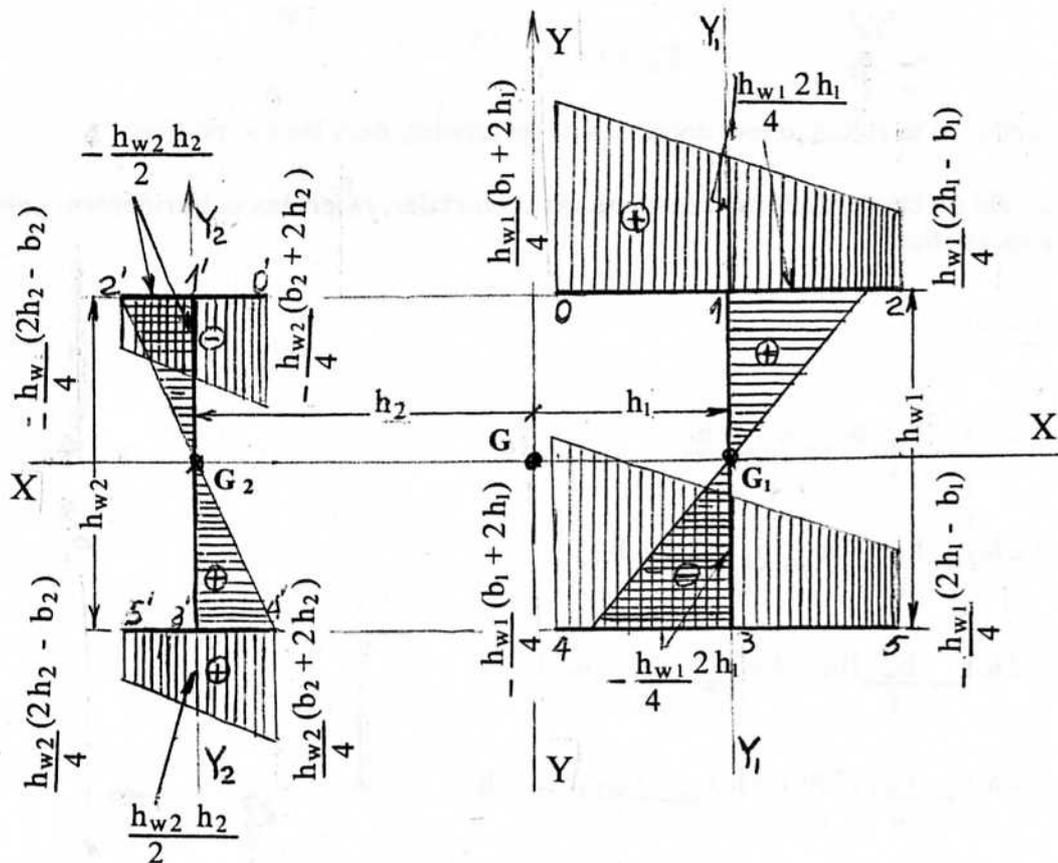


Figura 53

9.3- Cálculo de la distancia X_M , entre el baricentro y el centro de torsión, de la sección

total. Con el valor de las coordenadas sectoriales, referidas al baricentro, se calcula el valor

de R_x .

Perfil doble te de alas anchas:

$$1.- \text{ alas } \frac{1}{2} \left[\frac{h_{w1}}{4} (2h_1 + b_1) + \frac{h_{w1}}{4} (2h_1 - b_1) \right] 2 b_1 \frac{h_{w1}}{2} t_{f1} = \frac{h_{w1}^2}{2} h_1 b_1 t_{f1}$$

$$2.- \text{ alma } \frac{1}{2} \frac{h_{w1}}{2} h_1 \frac{h_{w1}}{2} \frac{2}{3} \frac{h_{w1}}{2} t_{w1} \cdot 2 = \frac{h_{w1}^3}{12} t_{w1} h_1$$

$$\sum 1 + 2 = \frac{h_{w1}^2}{2} h_1 b_1 t_{f1} + \frac{h_{w1}^3}{12} h_1 t_{w1} = \frac{h_{w1}^2}{2} h_1 (b_1 t_{f1} + \frac{h_{w1} t_{w1}}{6})$$

Perfil doble te alas angostas (P N I). Las coordenadas son las mismas anteriores, pero con diferentes valores, y signo contrario a las anteriores.

$$\sum 1' + 2' = -\frac{h_{w2}^2}{2} b_2 h_2 t_{f2} - \frac{h_{w2}^3}{12} h_2 t_{w2} = -\frac{h_{w2}^2}{2} h_2 (b_2 t_{f2} + \frac{h_{w2} t_{w2}}{6})$$

$$X_M = \frac{\frac{h_{w1}^2}{2} h_1 (b_1 t_{f1} + \frac{h_{w1} t_{w1}}{6}) - \frac{h_{w2}^2}{2} h_2 (b_2 t_{f2} + \frac{h_{w2} t_{w2}}{6})}{J_x} \quad (90)$$

Una vez conocido el valor de X_M , se tiene la ubicación del centro de torsión, y se pueden calcular las distancias entre éste y el baricentro del perfil doble te de alas anchas y el de alas cortas (G_1 y G_2), que serán:

$$h_{M1} = h_1 - X_M \quad h_{M2} = h_2 + X_M$$

9.4 Cálculo del módulo de alabeo C_w , perfil doble te alas anchas, referido al centro de torsión

$$(0-2) \frac{1}{3} \left\{ \left[\frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_{M1}) \right]^2 + \frac{h_{w1}}{4} (b_1 + 2 h_{M1}) \frac{h_{w1}}{4} (2 h_{M1} - b_1) + \left[\frac{h_{w1}}{4} (2 h_{M1} - b_1) \right]^2 \right\} b t_f \times 2 =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h_{w1}^2}{4} \left[3 h_{M1}^2 + \frac{b_1^2}{4} \right] b_1 t_{f1} \times 2 = \frac{h_{w1}^2}{4} \left[h_{M1}^2 \cdot b_1 t_{f1} + \frac{b_1^3 t_{f1}}{12} \right] \times 2$$

$$(3-1) \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{h_{w1}}{4} 2 h_{M1} \right]^2 \cdot \frac{h_{w1}}{2} t_{w1} \cdot 2 = \frac{h_{w1}^2}{12} h_{M1}^2 \cdot h_{w1} t_{w1} = \frac{h_{w1}^3 t_{w1}}{12} h_{M1}^2$$

$$C_{w1} = \sum = \frac{h_{w1}^3 t_{w1}}{12} h_{M1}^2 + \frac{h_{w1}^2}{4} h_{M1}^2 \cdot 2 b_1 t_{f1} + \frac{2 b_1^3 t_{f1}}{12} \cdot \frac{h_{w1}}{4} =$$

$$= h_{M1}^2 \cdot \left[\frac{h_{w1}^3 t_w}{12} + \frac{h_{w1}}{4} \cdot b t_f \cdot 2 \right] + \frac{h_{w1}^2}{4} (J_{y1})$$

El primer sumando entre corchetes, es el momento de inercia del perfil de alas anchas, con respecto al eje X - X, que multiplicado por la distancia al cuadrado entre G₁ y el centro de torsión C_M que es (h_{M1})², brinda el primer término del módulo de alabeo, y el segundo sumando es el módulo de alabeo de este perfil, con respecto a su baricentro (G₁), y a su eje Y₁-Y₁, quedando en consecuencia la ecuación:

$$C_{w1} = (h_{M1})^2 J_{X1} + \left[\frac{h_{w1}^2}{4} \right] J_{Y1} \quad (91)$$

J_{Y1} = momento de inercia del perfil de alas anchas, con respecto a su propio eje Y₁ - Y₁

J_{X1} = momento de inercia del perfil de alas anchas, con respecto al eje X - X.

9.5 Cálculo del módulo de alabeo C_w, perfil doble te alas angostas, referido al centro de torsión.

$$(0-2) \frac{1}{3} \left[\frac{h_{w2}(b_2 + 2 h_{M2})}{4} \right]^2 + \frac{h_{w2}(b_2 + 2 h_{M2})}{4} \frac{h_{w2}(2 h_{M2} - b_2)}{4} + \left[\frac{h_{w2}(2 h_{M2} - b_2)}{4} \right]^2 \cdot b_{tf} \cdot 2 =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{h_{w2}^2}{4} \left[3 h_{M2}^2 + \frac{b_2^2}{4} \right] b_2 t_{f2} \times 2 = \frac{h_{w2}^2}{4} \left[h_{M2}^2 b_2 t_{f2} + \frac{b_2^3 t_{f2}}{12} \right] \cdot 2$$

$$(3-1) \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{h_{w2} 2 h_{M2}}{4} \right]^2 \frac{h_{w2} t_{w2}}{2} \cdot 2 = \frac{h_{w2}^2}{12} (h_{M2})^2 h_{w2} t_{w2} = \frac{h_{w2}^3 t_{w2}}{12} (h_{M2})^2$$

$$C_{w2} = \sum = \frac{h_{w2}^3 t_{w2}}{12} (h_{M2})^2 + \frac{h_{w2}^2}{4} (h_{M2})^2 \cdot 2 b_2 t_{f2} + \frac{2 b_2^3 t_{f2}}{12} \frac{h_{w2}^2}{4} =$$

$$= (h_{M2})^2 \left[\frac{h_{w2}^3 t_{w2}}{12} + \frac{h_{w2}}{4} b_2 t_{f2} \cdot 2 \right] + \frac{h_{w2}^2}{4} (J_{y2})$$

El primer sumando entre corchetes, es el momento de inercia del perfil de alas cortas con respecto al eje X - X, que multiplicado por la distancia al cuadrado entre G₂ y el centro de torsión C_M que es (h_{M2})², brinda el primer término del módulo de alabeo, y el segundo sumando es el módulo de alabeo de este perfil, con respecto a su baricentro (G₂), y a su eje Y₂ - Y₂, quedando en consecuencia la ecuación:

$$C_{w2} = (h_{M2})^2 J_{X2} + \frac{(h_{w2})^2}{4} \cdot J_{Y2} \quad (92)$$

J_{Y2} = momento de inercia del perfil de alas angostas, con respecto a su propio eje Y₂ - Y₂.

J_{X2} = momento de inercia del perfil de alas cortas, con respecto al eje X - X.

La suma de ecuaciones (91) y (92), dará el valor del módulo de alabeo de la sección armada.

La suma de ecuaciones (91) y (92), dará el valor del módulo de alabeo de la sección armada.

$$C_w = C_{w1} + C_{w2} = \left\{ \frac{(h_{M1})^2}{4} J_{X1} + \frac{(h_{w1})^2}{4} J_{Y1} + \frac{(h_{M2})^2}{4} J_{X2} + \frac{(h_{w2})^2}{4} J_{Y2} \right\} \quad (93)$$

En esta ecuación el segundo y cuarto sumando, es el módulo de alabeo del perfil de alas anchas con respecto a su baricentro G_1 , y el módulo de alabeo del perfil de alas cortas con respecto a su baricentro G_2 , respectivamente.

Se ha realizado aquí un análisis minucioso del problema, se llegaría al mismo resultado, analizando la ecuación (60), que corresponde a una sección armada doblemente simétrica; en el perfil de alas anchas, se debe reemplazar h^2 por $(2 h_{M1})^2$ y el segundo sumando queda igual, llegando a la ecuación (91). Con esta misma ecuación (60), en el perfil de alas cortas, se debe reemplazar h^2 por $(2 h_{M2})^2$, quedando igual el segundo sumando, obteniéndose la ecuación (92), y con la suma de estas se llega a la ecuación (93).

Lo importante en todo esto, es saber la ubicación del centro de torsión, mediante la ecuación (90), para calcular con respecto a este el módulo de alabeo.

10.- Sección armada con dos perfiles angulares de alas iguales, separados por una presilla, unidos por las puntas como se ve en figura 54.

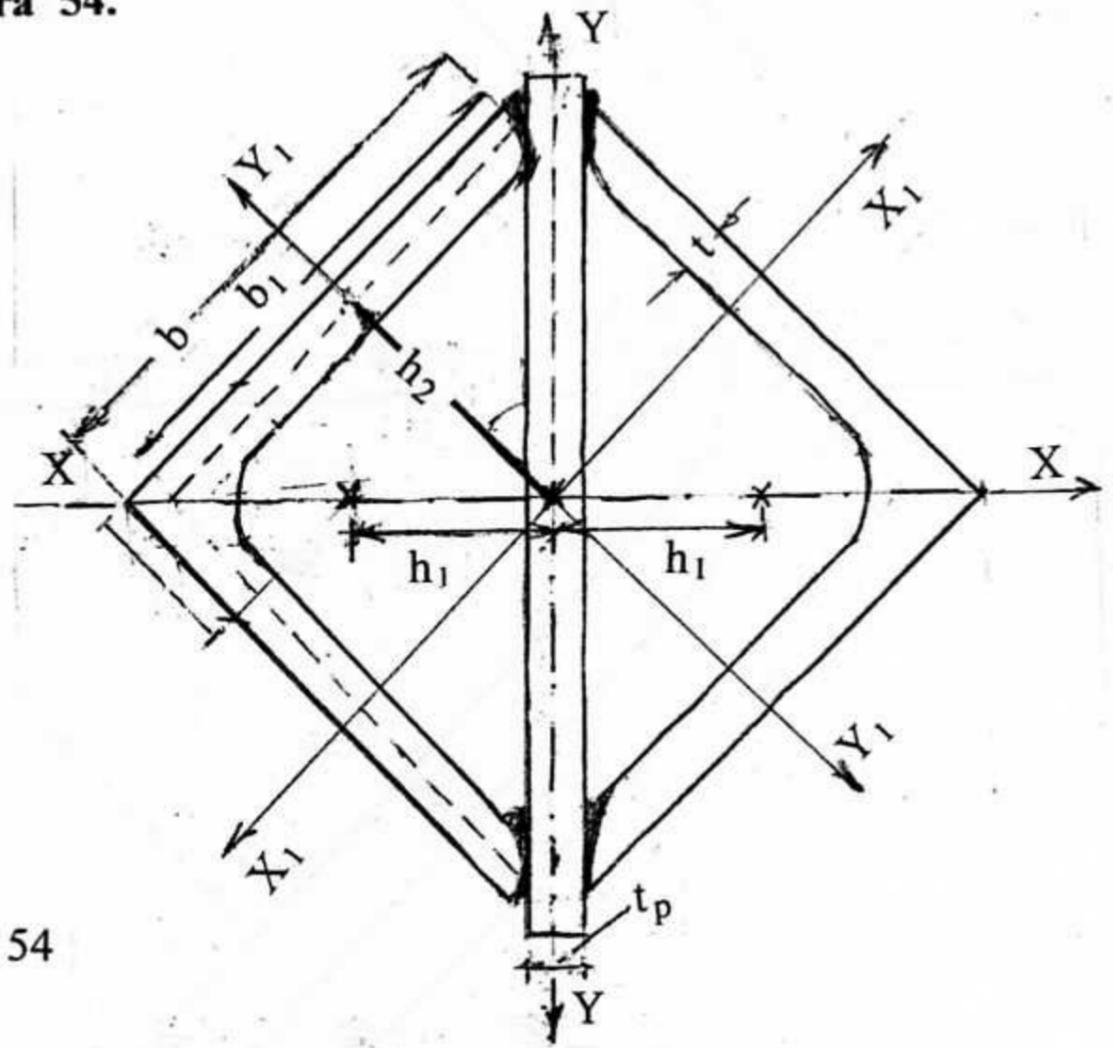
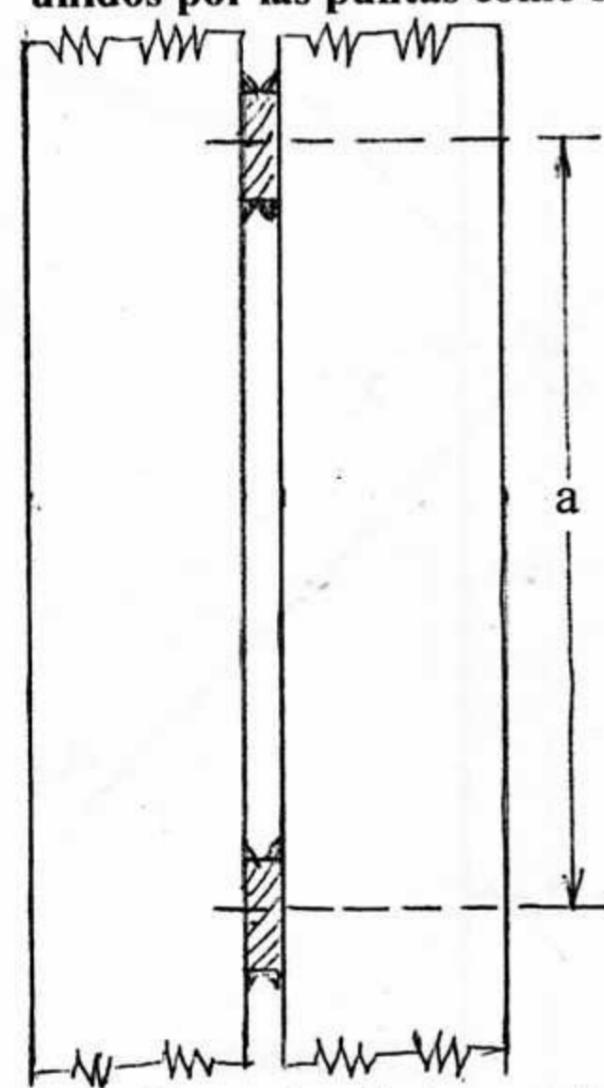


Figura 54

Tomando el ala superior izquierda, se calcula el alabeo del ala, con respecto al centro de torsión, figura 55. La coordenada sectorial referida al centro de torsión será:

$$\Phi_M = (h_2 + y_1) x_1 \quad (\varphi)^2 = (h_2 + y_1)^2 \quad C_w = \int (\varphi_M)^2 dF$$

$$C_{w1} = \int (h_2 + y_1)^2 (x_1)^2 dx_1 dy_1 = \int [(h_2)^2 + (y_1)^2] dx_1 dy_1$$

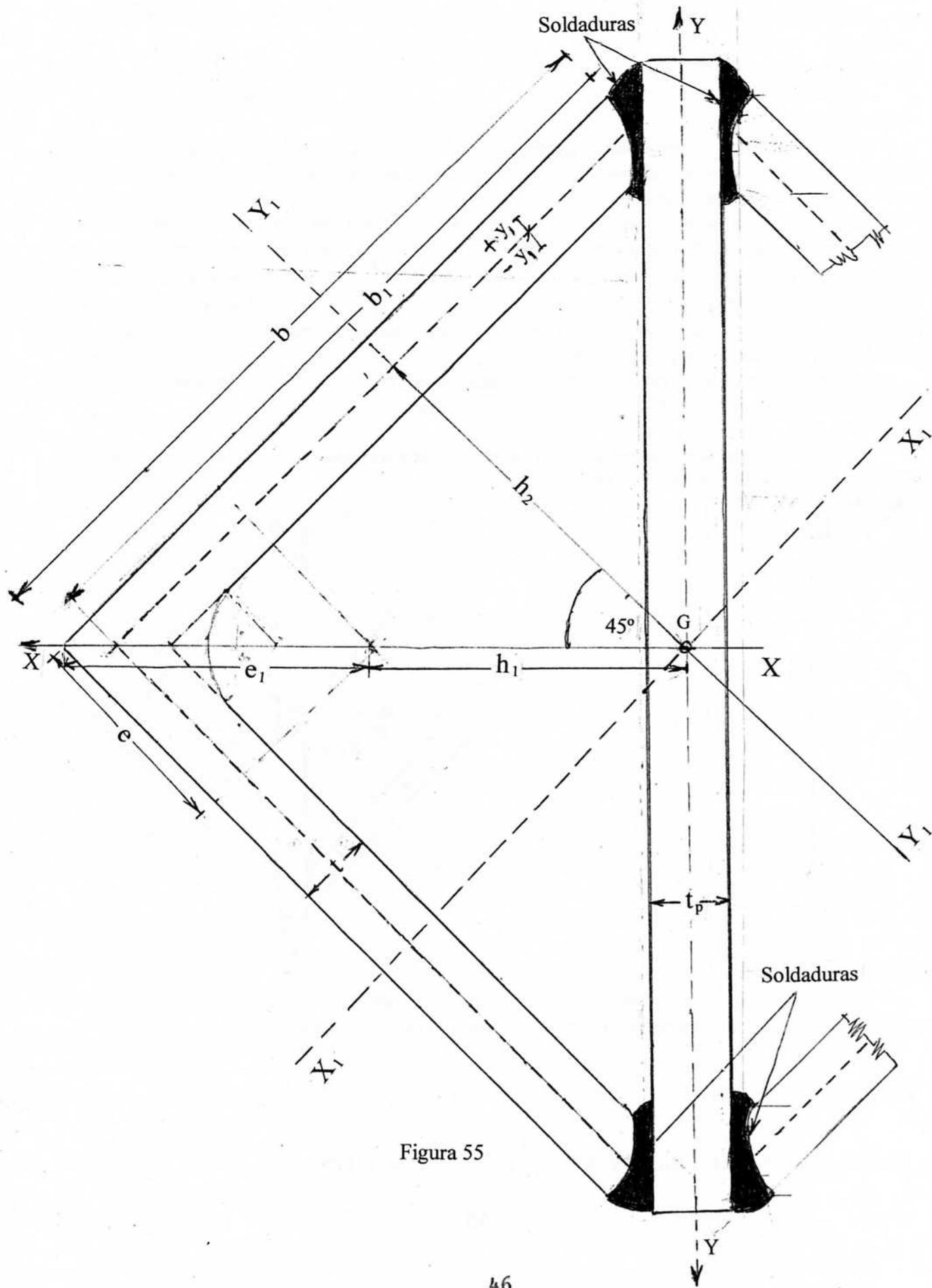


Figura 55

Resolviendo las integrales por separado:

$$\int_0^{b_1} (x_1)^2 dx_1 = (1/3) \left| (x_1)^3 \right|_0^{b_1} = (1/3) b^3 \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \int (h_2 + y_1)^2 dy_1 &= \int [(h_2)^2 + 2 h_2 y_1 + (y_1)^2] dy_1 = 2 \int_0^{t/2} (h_2)^2 dy_1 + 2 \int_0^{t/2} (y_1)^2 dy_1 = \\ &= 2 (h_2)^2 \left| y_1 \right|_0^{t/2} + (2/3) \left| (y_1)^3 \right|_0^{t/2} = (h_2)^2 t + (2/3) t^3/8 = (h_2)^2 t + t^3/12 \quad (95) \end{aligned}$$

haciendo el producto de (94) y (95)

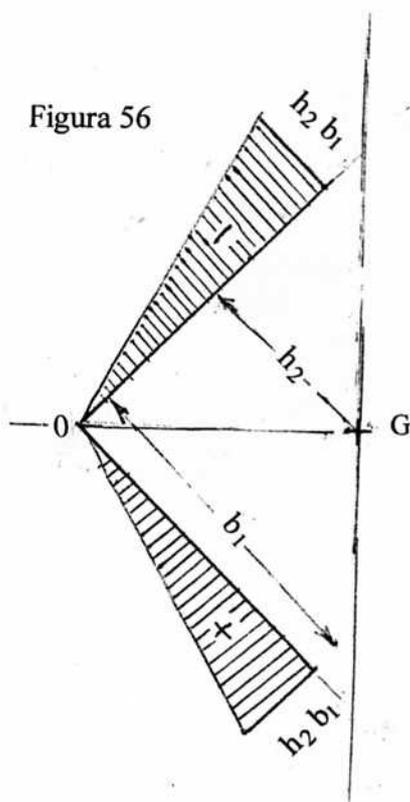
$$C_{w1} = \frac{1}{3} b^3 [(h_2)^2 t + t^3/12] = \frac{1}{3} b^3 (h_2)^2 t + \frac{b^3 t^3}{36} \quad (96)$$

Pero esto es para una sola ala, se debe multiplicar por cuatro :

$$C_w = \frac{4}{3} b^3 (h_2)^2 t + \frac{b^3 t^3}{9} \quad (97)$$

Si se hubiesen usado las coordenadas sectoriales, y partiendo de las coordenadas verdaderas, (porque se conoce la coordenada con valor nulo), como se ve en figura 56, vendría:

Figura 56



$$C_{w1} = \frac{1}{3} (b_1 h_2)^2 b_1 t = \frac{1}{3} b^3 (h_2)^2 t \quad (98)$$

y esto es para una sola ala, se debe multiplicar por cuatro, y se llega al primer sumando de (97):

$$C_w = \frac{4}{3} b^3 (h_2)^2 t \quad (99)$$

y se vuelve a repetir acá, la teoría de las coordenadas sectoriales, no calcula el alabeo propio de cada uno de los componentes de la sección

Capítulo II: Pandeo por torsión.

2. - Introducción.

Una barra armada, solicitada por una carga de compresión centrada, puede pandear por torsión únicamente si el eje de los centros de gravedad coincide con el centro de corte (o centro de torsión), lo cual ocurre en las secciones de doble simetría o de antimetría (figura 1); y para que esto ocurra, será necesario que esta carga crítica sea inferior a la de Euler (pandeo por flexión), lo cual se da en los perfiles delgados abiertos, que tienen poca rigidez torsional.

Cuando la barra armada, no tiene dos ejes de simetría o de antimetría, el pandeo que tiene lugar es de flexotorsión, y su carga crítica es menor que la de Euler.

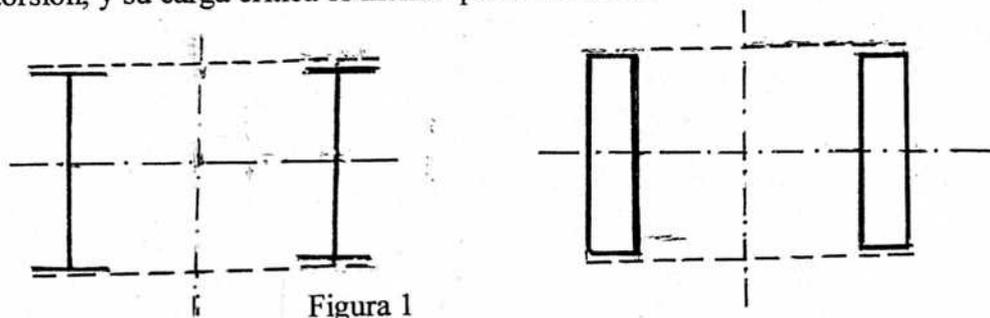


Figura 1

2.1 - Análisis del fenómeno. - El pandeo por torsión de barras armadas, igual que en el caso de barras de alma llena, consiste en un arrollamiento helicoidal de la barra, alrededor de su eje de torsión o eje de centros de corte. Analizando una barra armada, compuesta por dos doble te de doble simetría, solicitada por una compresión centrada P , y un momento torsor M_t (figura 2 a), se observa que puede pandear por torsión alrededor de su eje, de torsión coincidente con el de gravedad, de tal forma que se enrolla alrededor de un cilindro como se ve en figura 2a, y suponiendo que la columna armada es infinitamente rígida a la flexión, y así puede mantener las alas opuestas en su posición relativa.

Cortando los perfiles enrollados y estudiando dos secciones separadas por la distancia unidad, la fibra AB después de la torsión pasa a la posición AB' , es decir el punto B se ha desplazado a B' y se tiene, (figura 2b):

1) $BB' = r \theta$

separación dx

2) $BB' = r d\theta$

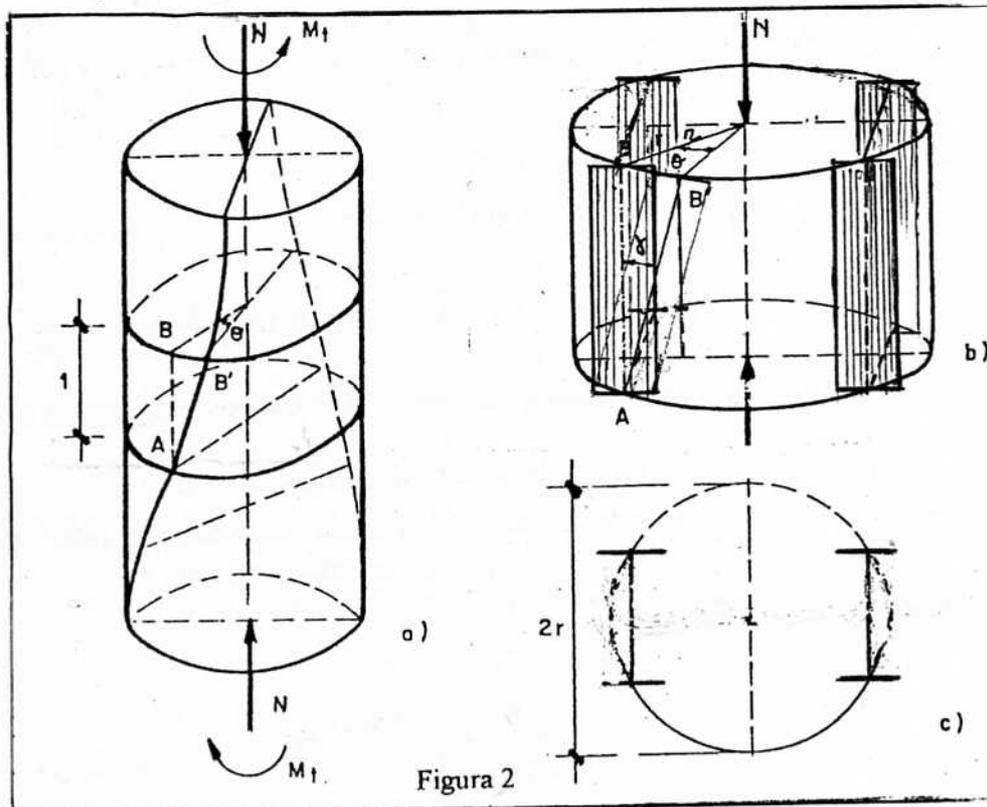


Figura 2

La fibra AB antes de la torsión está solicitada por una fuerza $\sigma \cdot dF$, y luego de la torsión tomará una inclinación, como puede verse en figura 3:

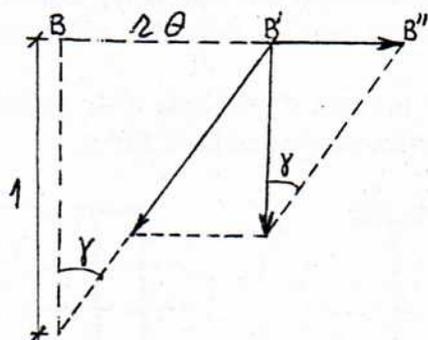


Figura 3

Puede verse que por razones de equilibrio, aparece una componente BB en cada fibra, que favorece al momento torsor (al revés ocurre con una tracción, que es estabilizadora). El valor de esta componente es:

$$(3) \quad B'B'' = \sigma \, dF \, \text{tg} \gamma \cong \sigma \, dF \, \gamma \quad (\text{para } dx = 1) \quad \text{ó} \quad B'B'' = \sigma \, dF \, \text{tg}(d\gamma) = \sigma \, dF \, d\gamma \quad (\text{para } dx \neq 1)$$

$$(4) \quad \sigma = P/F \quad \text{el momento torsor correspondiente será:}$$

$$(5) \quad dM = \sigma \, dF \, \gamma \, r \quad \text{y como} \quad \gamma = \text{tg} \gamma = B'B''/l,0 = r \theta \quad (6) \quad \text{ó también}$$

$$(5') \quad dM = \sigma \, dF \, d\gamma \, r \quad \text{y como} \quad d\gamma = \text{tg} \, d\gamma = B'B''/dx = r (d\theta / dr)$$

el momento torsor quedará:

σ = tensión de compresión en sección armada

$$(7) \quad dM = \sigma \, r^2 \, \theta \, dF \quad \text{ó} \quad dM = \sigma \, dF \, r^2 \, (d\theta / dx) \quad \text{integrando se obtiene el momento}$$

$$(8) \quad M = \sigma \, \theta \int r^2 \, dF = \sigma \, J_p \, \theta \quad \text{ó} \quad M = \sigma \, (d\theta / dx) \int r^2 \, dF = \sigma \, \theta' \, J_p$$

siendo estos momentos flectores exteriores. J_p = momento de inercia polar. F = área de sección.
 de sección armada armada

Puede verse que el efecto de añadir una compresión a la torsión, es el de aumentar el momento torsor, o bien su equivalencia: disminuir la rigidez torsional en el valor $\sigma \, J_p$. Se recuerda que esta barra de sección doble te, con dos ejes de simetría, y de muy poca rigidez torsional, está solicitada únicamente por una compresión axial centrada, y por lo tanto:

$$(9) \quad \sigma = P/F$$

2.2 – Ecuación diferencial reducida. - Dando a la barra una perturbación, que en este caso no será una fuerza infinitesimal, sino un momento torsor infinitesimal, la barra sufrirá una torsión, eliminando luego el momento perturbador, la barra vuelve a su posición primitiva de equilibrio, o sea sin torsión y carga centrada.

La carga axial sigue aumentando su valor, y siempre se podrá perturbar la barra mediante un momento torsor, y al desaparecer éste la barra vuelve a su posición inicial sin torsión; la carga P sigue aumentando hasta llegar a un valor tal que, perturbandola con un momento torsor, al desaparecer éste la barra queda deformada (torsionada), y no vuelve a su posición inicial. A esta última carga que deja a la barra deformada (torsionada) se la denomina: carga crítica de pandeo por torsión.

La barra no puede volver a su posición inicial, porque los momentos torsores interior y exterior son iguales; planteando las ecuaciones del momento torsor interior y exterior

$$(10) \quad M_{ti} = G J_t (d\theta / dz) - E C_M d^3\theta / dz^3 = G J_t \theta' - E C_M \theta''' \quad \text{momento interior}$$

$$(11) \quad M_{te} = \sigma J_p (d\theta / dz) = \sigma J_p \theta' \quad \text{momento exterior}$$

igualando ambas $(12) \quad \sigma J_p \theta' = G J_t \theta' - E C_M \theta''' \quad J_t = \text{módulo de torsión de sección armada}$

$$(13) \quad (G J_t - \sigma J_p) \theta' - E C_M \theta''' = 0 \quad \text{dividiendo todo por } E C_M \text{ queda:}$$

$$(14) \quad \theta''' + \frac{\sigma J_p - G J_t}{E C_M} \theta' = 0 \quad \text{llamando } a^2 = \frac{\sigma J_p - G J_t}{E C_M} \quad (15)$$

Quedando la ecuación $(16) \quad \theta''' + a^2 \theta' = 0$ también está la reducida: $(16') \quad \theta'' + a^2 \theta = 0$

y la solución de la ecuación diferencial (15) es: C_M módulo de alabeo de sección armada

$$(17) \quad \theta = C_1 \cos(az) + C_2 \sen(az) + C_3 \quad \text{y la solución de la ecuación } (16') \text{ es:}$$

$$(17') \quad \theta = C_1 \cos(az) + C_2 \sen(az)$$

2.3 - Condiciones de borde – Tensiones críticas. - Imponiendo condiciones de borde, será posible determinar la carga crítica, y puede observarse que son dos por apoyo, y solo tenemos tres constantes, de lo que se deduce que solamente algun caso particular se podrá resolver. Para ambos apoyos articulados, las condiciones seran:

$$(18) \quad x = 0 \longrightarrow [\theta = 0; \theta'' = 0] \quad x = \ell \longrightarrow [\theta = 0; \theta'' = 0]$$

En ambos extremos está impedido el giro, y además pueden alabearse libremente, y los momentos son nulos. Con la condicion para $x = 0$: seran nulos C_1 y C_3 de (17) , quedando la ecuación:

$$(19) \quad C_1 = C_3 = 0 \quad (20) \quad \theta = C_2 \sen(az) \quad \text{con } (17') \text{ se llega a lo mismo}$$

Aplicando las otras dos condiciones para $x = \ell$, se obtiene:

$$(21) \quad C_2 \text{ sean } (a\ell) = 0 \quad \text{y} \quad -C_2 a^2 \text{ sen } (a\ell) = 0$$

y para que esto sea nulo se deberá cumplir que: $\text{sen } (a\ell) = 0$ (22)

los valores que debe tomar el argumento, para que $\text{sen } (a\ell) = 0$, son:

$$a\ell = (n\pi) \longrightarrow a^2 = (n\pi/\ell)^2 \quad (23)$$

de la cual se toma el valor para $n = 1$, e igualando con ecuación (15), se tiene que:

$$\frac{\pi^2}{\ell^2} = \frac{\sigma J_p - G J_t}{E C_M} \quad (24) \quad \text{despejando la tensión crítica } \sigma_{kti}$$

$$\sigma_{kti} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_M}{\ell^2} + G J_t \right] \quad (25) \quad P_{kt} = \sigma_{kt} F \quad (26)$$

2.4 - Ecuación diferencial general. - Estas tensiones críticas, o cargas críticas ideales, a las que se han arribado, es para un caso muy particular: "para una barra apoyada-apoyada", utilizando la ecuación de tercer orden (también se puede utilizar la ecuación de segundo orden. Cuando las condiciones de borde son diferentes esta ecuación no ayuda a resolver el problema, pues tienen tres constantes de integración en un caso, y dos en la otra, siendo cuatro las condiciones de borde para otros casos.

Si la barra estuviese empotrada en ambos extremos, las condiciones de borde serían:

$$x = 0 \longrightarrow (\theta = 0; \theta' = 0) \quad (27) \quad x = \ell \longrightarrow (\theta = 0; \theta' = 0)$$

Para resolver este problema es necesario disponer de la ecuación general de cuarto orden, derivando una vez la de tercer orden, ó dos veces la de segundo orden, se obtiene la general de cuarto orden, y esta sí tiene cuatro constantes de integración.

Si se deriva una vez la ecuación (16) se obtiene la de cuarto orden:

$$\theta^{IV} + a^2 \theta'' = 0 \quad (28) \quad \text{y derivando dos veces la ecuación (16'), se obtiene la misma.}$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\theta = C_1 \cos(ax) + C_2 \text{ sen}(ax) + C_3 (x/\ell) + C_4 \quad (29)$$

2.5 - Condiciones de borde - Tensiones críticas. Planteando las condiciones de borde, se llega a un sistema de cuatro ecuaciones homogéneas:

$$C_1 \times 1 + C_2 \times 0 + C_3 \times 0 + C_4 = 0 \quad (30)$$

$$C_1 a \times 0 + C_2 a \times 1 + C_3 (1/\ell) + C_4 = 0 \quad (31)$$

$$C_1 \cos(a\ell) + C_2 \text{ sen}(a\ell) + C_3 + C_4 = 0 \quad (32)$$

$$C_1 a \operatorname{sen}(a\ell) + C_2 \cos(a\ell) + C_3(1/\ell) + C_4 = 0 \quad (33)$$

Se llega a un sistema de cuatro ecuaciones homogéneas, y para que esto tenga solución no trivial, deberá ser el determinante de los coeficientes nulo.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1/\ell & 0 \\ \cos(a\ell) & \operatorname{sen}(a\ell) & 1 & 1 \\ -a \operatorname{sen}(a\ell) & a \cos(a\ell) & 1/\ell & 0 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante:

$$-[-a^2 \operatorname{sen}(a\ell) + (a/\ell) \cos^2(a\ell) + (a/\ell) \operatorname{sen}^2(a\ell) - (a/\ell) \cos(a\ell)] - (a/\ell) + (a/\ell) \cos(a\ell) = 0 \quad \text{que se reduce a:}$$

$$(34) \quad a\ell \operatorname{sen}(a\ell) + 2 \cos(a\ell) - 2 = 0 \quad \text{y teniendo presente que:}$$

$$\operatorname{sen}(a\ell) = 2 \operatorname{sen}(a\ell/2) \cdot \cos(a\ell/2) \quad \text{y} \quad \cos(a\ell) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2(a\ell/2)$$

que reemplazadas en ecuación (34) se llega a:

$$2 a\ell \operatorname{sen}(a\ell/2) \cdot \cos(a\ell/2) + 2 - 4 \operatorname{sen}^2(a\ell/2) - 2 = 0 \quad \text{factoreando queda:}$$

$$\operatorname{sen}(a\ell/2) [a\ell \cos(a\ell/2) - 2 \operatorname{sen}(a\ell/2)] = 0 \quad \text{dividiendo por } -2 \cos(a\ell/2) \text{ queda:}$$

$$(35) \quad \operatorname{sen}(a\ell/2) [\operatorname{tg}(a\ell/2) - (a\ell/2)] = 0 \quad \text{y para que esto sea nulo deberá suceder que}$$

$$(35 a) \quad \operatorname{sen}(a\ell/2) = 0 \quad \text{ó} \quad (35 b) \quad \operatorname{tg}(a\ell/2) - (a\ell/2) = 0$$

$$\text{la condición (35 a) lleva } \operatorname{sen}(a\ell/2) = 0 \quad (36) \quad (a\ell/2) = (n\pi)^2 \longrightarrow a^2 = (2n\pi/\ell)^2$$

y la condición (35 b) $\operatorname{tg}(a\ell/2) = (a\ell/2)$ lleva a:

$$(37) \quad \begin{aligned} (a_1\ell/2) = 4,4934 & \longrightarrow a_1 = (2 \times 4,4934/\ell) \longrightarrow (a_1)^2 = (8,9868/\ell)^2 \\ (a_2\ell/2) = 7,7253 & \longrightarrow a_2 = (2 \times 7,7253/\ell) \longrightarrow (a_2)^2 = (15,4506/\ell)^2 \end{aligned}$$

reemplazando (36) en (15) y tomando $n = 1$, viene:

$$(38) \quad \frac{(2\pi)^2}{\ell^2} = \frac{\sigma J_p - G J_t}{E C_M} \quad \text{despejando la tensión crítica ideal } \sigma_{kti}, \text{ de la barra armada}$$

$$(39) \quad \sigma_{kit} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{4 \pi^2 E C_M}{\ell^2} + G J_t \right] \quad \text{y} \quad P_{kti} = \sigma_{kti} F \quad (40)$$

A la ecuación (39) se la puede escribir

$$\sigma_{kti} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_M}{(0,5\ell)^2} + G J_t \right] \quad (41)$$

Comparando (41), con la ecuación (25) que es válida para una barra articulada-articulada, se desprende que para cualquier tipo de condiciones de borde de la columna, la ecuación general que brinda la tensión crítica ideal de pandeo por torsión será:

$$(42) \quad \sigma_{kti} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_M}{(K\ell)^2} + G J_t \right]$$

Concluyendo, las tres ecuaciones que se pueden plantear, y por separado, en un perfil en el cual coincide el centro de gravedad, con el centro de corte ó torsión son:

$$(43) \quad \begin{cases} E J_x W^{IV} + P_x W^{II} = 0 \\ E J_y (1 - P \bar{\gamma}) W^{IV} + P W^{II} = 0 \\ E C_M \theta^{IV} + [P (i_p)^2 - G J_t] \theta^{II} = 0 \end{cases}$$

Si los apoyos son simples, vendrá la deformada en función del seno:

$$(44) \quad \begin{cases} W_x = C_1 \text{sen} (n \pi z / \ell) \\ W_y = C_2 \text{sen} (n \pi z / \ell) \\ \theta = C_3 \text{sen} (n \pi z / \ell) \end{cases}$$

reemplazando (44) en (43) queda:

$$(45) \quad \begin{cases} C_1 (P - E J_x n^2 \pi^2 / \ell^2) = 0 \\ C_2 \left[\bar{P} - \frac{P_{cri}}{1 + P_{cri} \bar{\gamma}} \right] = 0 \\ C_3 [P (i_p)^2 - G J_t - E C_M n^2 \pi^2 / \ell^2] = 0 \end{cases}$$

Despejando las cargas críticas se obtiene:

$$(46) \quad P_{kxi} = \frac{n^2 \pi^2 E J_x}{(K\ell)^2} \quad \bar{P}_{cri} = \frac{P_{cri}}{1 + P_{cri} \bar{\gamma}} \quad P_{kit} = \frac{1}{(i_p)^2} \left[\frac{n^2 \pi^2 E C_M}{(K\ell)^2} + G J_t \right]$$

Con el grupo de ecuaciones (45), se puede plantear una matriz, e igualar su determinante a cero:

$$\Delta = \begin{vmatrix} P - P_{kx} & 0 & 0 \\ 0 & P - \bar{P}_{ky}l & 0 \\ 0 & 0 & P - P_t \end{vmatrix} = 0 \quad (47)$$

y el determinante será: $(P - P_{kx})(P - \bar{P}_{ky}l)(P - P_t) = 0$ (48)

Las cargas críticas que resuelven esta ecuación de tercer grado, son las de (46).

Hasta aquí ambas normas, tanto la americana como la europea coinciden con estas ecuaciones que brindan la tensión crítica ideal de pandeo por torsión.

2.7 - Norma americana. - La norma americana toma la ecuación (42), y al momento de inercia polar lo toma como: $J_p = F(\bar{r}_o)^2$, siendo \bar{r}_o el radio de giro polar, referido al centro de torsión, como asimismo J_p es el momento de inercia polar referido al centro de torsión o cortante, que en este caso particular ambos centros coinciden y entonces:

$$(\bar{r}_o)^2 = (i_p)^2 = J_p/F = (J_x + J_y)/F = (r_x)^2 + (r_y)^2 = (i_x)^2 + (i_y)^2 \quad (49) \text{ entonces}$$

$$\sigma_{kit} = \frac{1}{F(\bar{r}_o)^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(Kl)^2} + G J_t \right] \quad (50) \quad \ell = \text{longitud de la barra. La norma americana al módulo de alabeo, referido al centro de torsión lo denomina } C_w.$$

igualando la tensión crítica de pandeo por torsión, con la tensión crítica de pandeo por flexión

$$\frac{\pi^2 E}{(Kl/r)^2} = \frac{1}{F(\bar{r}_o)^2} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{(Kl)^2} + G J_t \right] \quad (51)$$

$J_x = \text{inercia de sección armada respecto eje x-x}$
 $J_y = \text{inercia de sección armada respecto eje y-y}$

teniendo presente que $G = E/[2(1 + \mu)]$ $\mu = 0,3$ (coeficiente de Poisson)

el radio de giro será,
de sección armada

$$r_t = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 J_t (Kl)^2}{J_p}} \quad (52)$$

la bibliografía americana toma el valor $0,039 \cong 0,04$.

Se debe hacer notar que, en las ecuaciones anteriores, se usó E como si el fenómeno se desarrolla en período elástico, pero si se está en período inelástico se debe usar E_t (módulo tangente), y de los estudios realizados por los americanos se constata que la relación entre G_t y E_t guarda la misma relación que en período elástico, lo equivale a decir que razonando en período inelástico se llegaría a la misma ecuación (52), siendo ésta válida para ambos campos.

La ecuación (52), permitirá determinar la carga crítica de torsión, para cualquier barra en que el centro de gravedad y el de torsión coincidan. Calculando r_t , y comparandolo con los radios de giro r_x y r_y , el menor de los tres determinará el tipo de pandeo.

La anterior norma americana del año 1961, determina la esbeltez de la barra con este radio de giro, que corresponde a una barra ideal que padea por flexión, con la misma carga de pandeo por torsión la barra real, en una palabra se hace uso de una esbeltez de comparación.

$$\lambda_{v_i} = (K\ell)/r_t \quad (53)$$

Con esta esbeltez y las ecuaciones (61) y (62) (publicación del autor "Pandeo en el campo real de barras de alma llena", norma americana y norma europea, comparaciones):

$$[61] \sigma_{cr} = \sigma_F [1 - \lambda_{v_i}^2 / (2 C_c^2)] \quad (\text{campo inelástico}) \quad [62] \sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda_{v_i}^2 \quad (\text{campo elástico})$$

$$P_{c_{r,t}} = \sigma_{cr} F \quad \text{y con el coeficiente de seguridad} \quad CS = 5/3 + 3 \lambda_w / 8 C_c - (1/8) (\lambda_w / C_c)^3$$

se calcula la carga admisible.

2.8 - La nueva norma americana. - La nueva norma americana, sigue los mismos lineamientos, en este caso, que para pandeo por flexión. En base a la esbeltez λ_v dada en ecuación (53), determina la esbeltez de comparación λ_c :

$$(54) \quad \lambda_c = (\lambda_{v_i} / \pi) [\sqrt{(\sigma_F / E)}] \longrightarrow \chi \quad (\text{tabla de pág. 64 de publicación citada})$$

$$\text{calculandose } \sigma_{c_{r,t}} = \chi \sigma_F \quad \text{ó} \quad P_{c_{r,t}} = \chi \sigma_F A > P_{\text{mayorado}} \quad (55)$$

Cuando se analiza un perfil de doble simetría, en los laminados casi siempre predomina las cargas críticas según los ejes principales de inercia, tendrían que variar mucho las longitudes críticas según el eje de menor inercia, para que la carga crítica por torsión sea determinante. Si el perfil tiene espesores pequeños y poca rigidez a la torsión, la carga P_{k_t} puede ser determinante. No perder de vista que en este último tipo de perfiles de espesores muy delgados, entran en la clase 3: secciones esbeltas, en la predomina el pandeo local.

2.9 - La norma europea. La norma europea DIN 4114 del año 1952, encara este problema de otra forma que al final dá iguales resultados, pues a diferencia de la americana que calcula el radio de giro de torsión, la europea lo hace calculando la esbeltez ideal de comparación, que al final es algo parecida a la americana, y con la que se llega a iguales valores.

Partiendo de la ecuación (42), igualando ésta a la carga crítica de una barra ideal que padea por flexión se tiene:

$$(56) \quad \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_M}{(K\ell)^2} + G J_t \right] = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_{v_i})^2} \quad \text{despejando } (\lambda_{v_i})^2$$

$$(57) \quad \lambda_{vi}^2 = \frac{\pi^2 E A (i_p)^2}{\frac{\pi^2 E C_M}{(\beta l)^2} + G J_t} = \frac{A (i_p)^2 (\beta l)^2}{C_M + \frac{G J_t (\beta l)^2}{\pi^2 E}} \quad \text{multiplicando y dividiendo por } (i_y)^2$$

$$(58) \quad \lambda_{vi}^2 = \lambda_{yi}^2 \frac{(i_p)^2}{\frac{C_M}{A (i_y)^2} + \frac{G J_t (\beta l)^2}{\pi^2 E A (i_y)^2}} = \frac{(i_p)^2}{\frac{C_M}{J_y} + \frac{G J_t (\beta l)^2}{\pi^2 E J_y}} \lambda_{yi}^2 =$$

$$(59) \quad = \lambda_{yi}^2 \frac{(i_p)^2}{\frac{C_M + \frac{G J_t (\beta l)^2}{\pi^2 E}}{J_y}} \quad \text{llamando} \quad c = \sqrt{\frac{C_M + 0,039 (\beta l)^2 J_t}{J_y}} \quad (60)$$

La norma DIN para hacerla mas general la presenta como:

$$(61) \quad c = \sqrt{\frac{C_M (\beta l)^2 / (\beta_o l_o)^2 + 0,039 (\beta l)^2 J_t}{J_y}} \quad \text{denominado radio de torsión de la sección.}$$

β = coef. de empotramiento de la sección.

β_o = coef. de alabeo de la sección.

l = longitud teórica de la barra.

l_o = distancia de importancia en la torsión, medida entre centros de gravedad, de grupos de roblones ó cordones de soldadura de los extremos de la barra.

$\beta = \beta_o = 1,0$ para apoyos articulados en los dos sentidos en los extremos de la barra, quedando impedido el giro dentro de su plano, y puedan girar estas secciones extremas alrededor de cualquiera de los ejes x-x e y-y.

$\beta = \beta_o = 0,5$ corresponde a un empotramiento perfecto alrededor del eje y-y, y aun alabeo impedido de las secciones extremas.

La norma DIN 4114 con λ_{vi} , toma de tablas el valor Ω , y realiza la siguiente verificación:

$$\lambda_{vi} \longrightarrow \Omega \longrightarrow P_{adm} = P \Omega / A \leq \sigma_{adm} \quad (62)$$

con los valores de λ_x , λ_{yi} , λ_{vi} , se puede saber si existe predominio de pandeo por torsión, en cuyo caso el valor de λ_v sería mayor que el de λ_x , λ_{yi} . La esbeltez de comparación λ_{vi} puede escribirse:

$$\lambda_{vi} = \frac{\beta l}{i_y} \frac{i_p}{c} \quad (63)$$

2.10 – Nueva norma europea. La nueva norma europea, con esta esbeltez de comparación λ_{vi} , calcula la esbeltez de comparación de esta nueva norma λ_c , y con este valor y usando la curva c , se extrae de la tabla correspondiente el valor de χ_c , con cual se puede calcular la tensión ó carga crítica:

$$(64) \quad \sigma_{kt} \geq \chi_c \sigma_F / 1,1 \qquad N_{kt} = \chi_c \sigma_F A / 1,1 \geq N_{mayorado} \quad (65)$$

Esta carga puede ser determinante frente a las N_{ky} ó N_{kz} , y esto se daría en perfiles cuyos espesores de los elementos que la componen son muy delgados y tienen poca rigidez a la torsión, y no olvidar que estos perfiles de espesores muy delgados entran en clase 4 de secciones, en la que predomina el pandeo local.

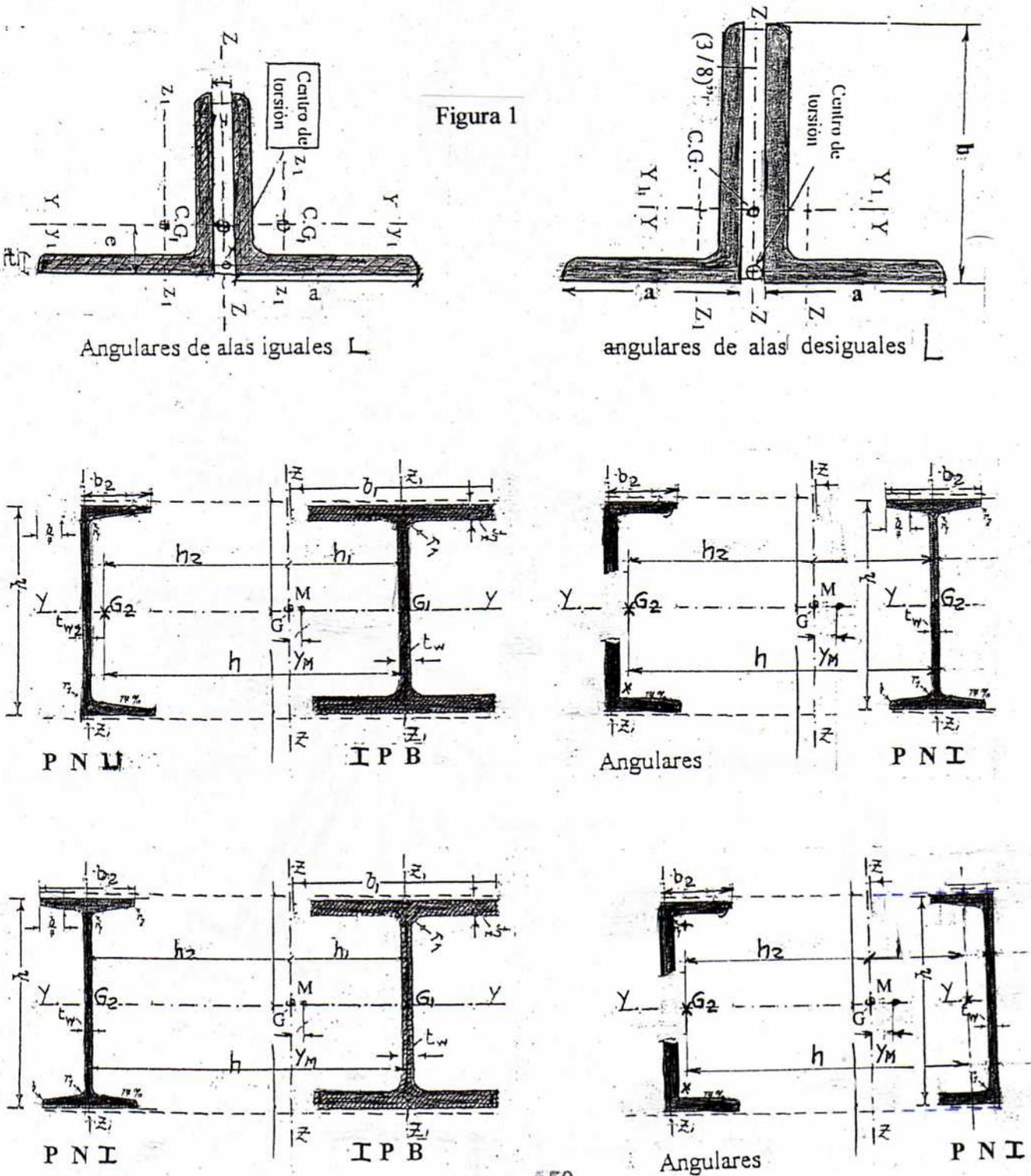
CONCLUSION

Con todo lo expuesto anteriormente, se puede decir que, si en las ecuaciones de “pandeo por torsión”, válidas para barras de alma llena, se reemplazan los valores de J_x , J_y , J_t , J_p , A , C_w , i_x , i_y , i_t , i_p , r_o , correspondientes a la sección armada, se obtienen las mismas ecuaciones deducidas anteriormente para barras armadas, siendo todo esto una demostración.

Capítulo III – Pandeo por flexotorsión, en barras armadas.

1. **Introducción.** Igual que en barras de alma llena, este tipo de pandeo se genera, en barras armadas cuya sección tiene el centro de corte, no coincidente con el centro de gravedad. Algunas de estas secciones, pueden verse en figura 1:

Figura 1



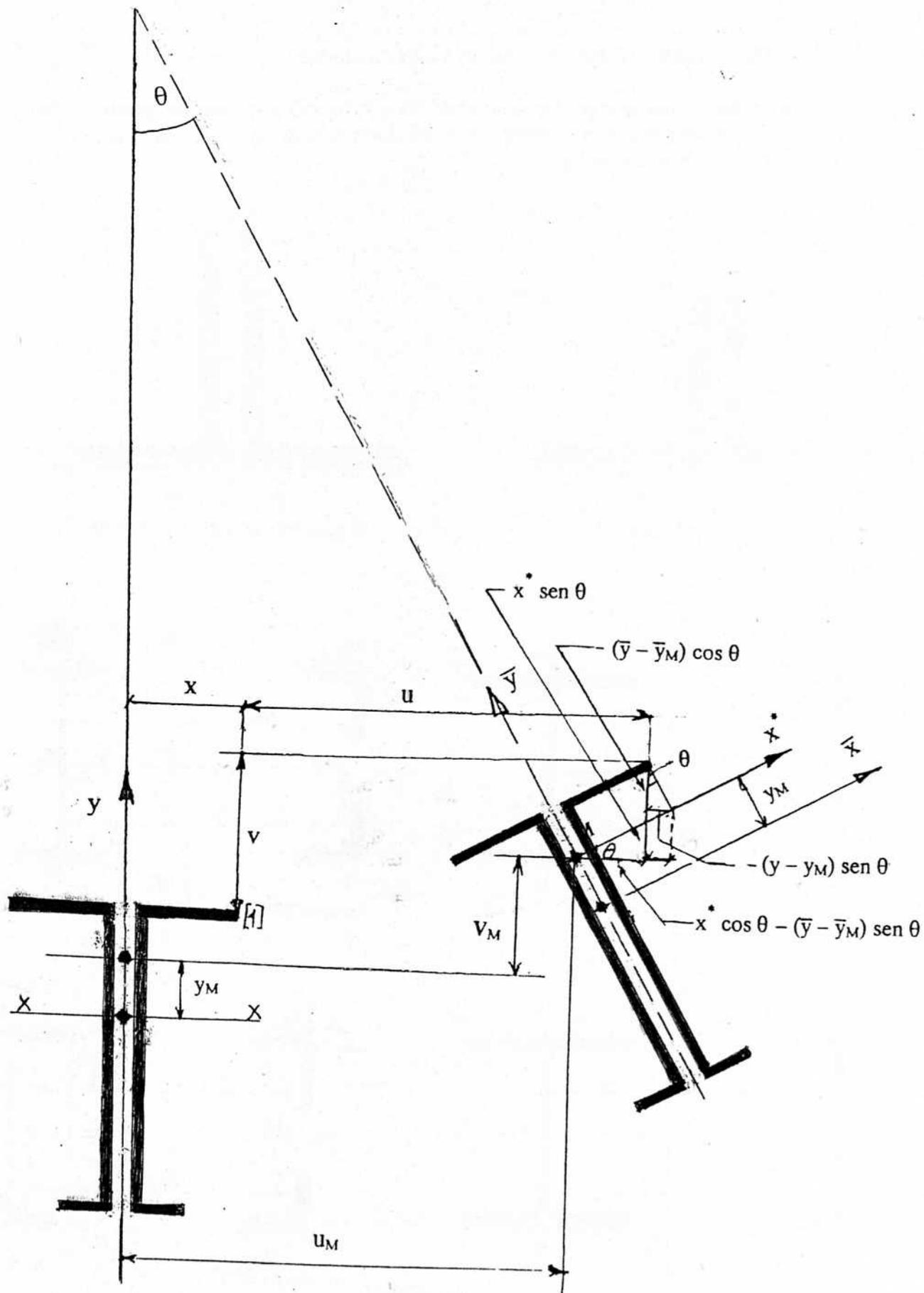


Figura 2

2. Análisis del fenómeno. Si se tiene una barra comprimida en su centro de gravedad, como se ve en figura 2, de simple simetría, referida a un sistema de ejes \bar{x} e \bar{y} , y se quiere analizar el pandeo por rotación y flexión, en relación con el centro de corte, se procede de la siguiente manera: luego de la flexión y de la rotación θ , la sección queda referida a un nuevo sistema \bar{x} e \bar{y} , se quiere ver cual es el desplazamiento de los puntos que componen la sección, para ello se elije un punto genérico como el [1] de figura 2, y de coordenadas x e y , calculandose el desplazamiento u y v .

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= u_M - x + x^* \cos \theta - (\bar{y} - \bar{y}_M) \operatorname{sen} \theta \\ v &= v_M - (y - y_M) + x^* \operatorname{sen} \theta + (\bar{y} - \bar{y}_M) \cos \theta \end{aligned}$$

el ángulo θ es una magnitud infinitesimal, y se tendrá que:

$$(2) \quad \operatorname{sen} \theta = \theta \quad x^* = x \quad \cos \theta = 1 \quad \bar{y} = y$$

reemplazando en ecuaciones (1):

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= u_M - (y - y_M) \theta \\ v &= v_M + x \theta \end{aligned}$$

La barra en estudio, tiene por condiciones de borde en sus extremos, apoyos simples, y entonces se cumple que:

$$(4) \quad \begin{aligned} \theta(0) = \theta''(0) = \theta(l) = \theta''(l) &= 0 \\ u(0) = u_M''(0) = u_M''(l) \neq u_M''(l) &= 0 \end{aligned}$$

Las condiciones de equilibrio para el momento, alrededor del eje y - y es:

$$(5) \quad M_y^{(e)} + M_y^{(i)} = 0$$

y de acuerdo a la figura 2, y figura 3, se puede plantear que:

$$(6) \quad M_y^{(e)} = P u_G \cos \theta = P [u_M - (y - y_M) \theta]$$

y el momento interno será:

$$(7) \quad M_y^{(i)} = -E J_y u_M''$$

y por equilibrio se tendrá que:

$$(8) \quad \begin{cases} 1) E J_y u_M'' + P [u_M - (y - y_M) \theta] = 0 \\ 2) E J_y u_M'' + P u_M - P (y - y_M) \theta = 0. \end{cases}$$

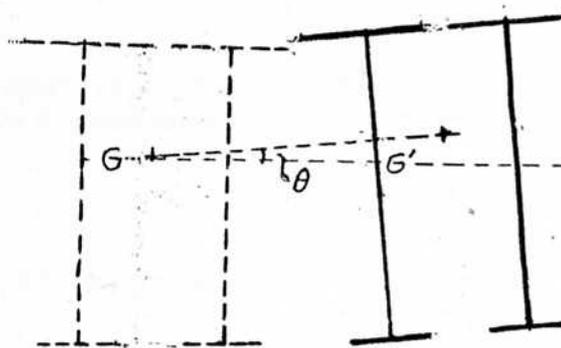


Figura 3

Como los ejes están referidos al centro de gravedad, es $y = 0$, quedando la ecuación (8.1):

$$(9) \quad E J_y u_M'' + P u_M + P y_M \theta = 0$$

Planteando el equilibrio de momentos alrededor del eje x-x se tiene:

$$(10) \quad M_x^{(e)} + M_x^{(i)} = 0 \quad M_x^{(e)} = P v_M \quad M_x^{(i)} = -E J_x v_M'' \quad \text{que reemplazadas en (10):}$$

$$(11) \quad E J_x v_M'' + P v_M = 0$$

El equilibrio de momentos alrededor del eje z-z vendrá:

$$(12) \quad M_z^{(e)} + M_z^{(i)} = 0$$

Se debe tener en cuenta que, el eje de gravedad de la barra se arquea (flexiona), apareciendo en consecuencia esfuerzos de corte, como puede verse en figura 4. Por tratarse de una sección de simple simetría, habrá torsión, pues su baricentro no coincide con el centro de corte o centro de torsión, y se tendrá como puede verse en figura 4:

$$(13) \quad \text{tg } \alpha = u_M' \cong \text{sen } \alpha \quad \text{y entonces el esfuerzo de corte viene:}$$

$$(14) \quad Q^{(e)} = P \text{sen } \alpha = P u_M' = \sigma F u_M'$$

Este esfuerzo cortante genera un momento torsor exterior, cuyo valor es:

$$(15) \quad M_{t1}^{(e)} = Q^{(e)} y_M = \sigma F u_M' y_M$$

Como consecuencia de esta torsión, las fibras longitudinales se inclinan, y se produce otro momento torsor exterior, cuyo valor es:

$$(16) \quad M_{t2} = \sigma J_{pM} \theta' \quad J_{pM} = \text{momento de inercia polar, con respecto al centro de corte, de sección armada.}$$

3. Ecuación diferencial de pandeo por flexotorsión. Con las deducciones efectuadas anteriormente (capítulo I, ecuaciones 68, 69 y 70), el momento interior de torsión será:

$$(17) \quad M_z^{(i)} = -E C_M \theta''' + G J_t \theta'$$

igualando ambos momentos, o sumándolos como en ecuación (12), viene:

$$(18) \quad E C_M \theta''' - G J_t \theta' + \sigma F u_M' y_M + \sigma \theta' J_{pM} = 0$$

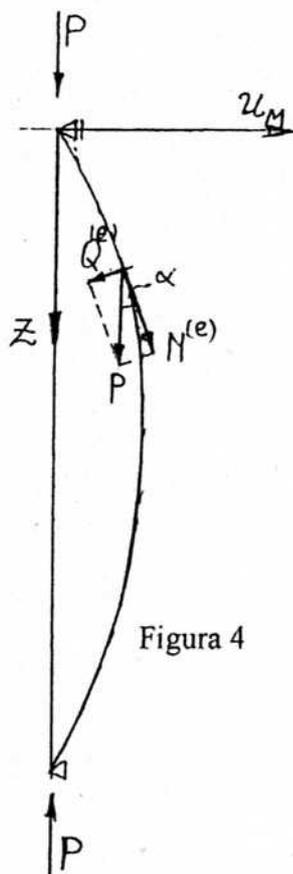


Figura 4

Las deformaciones u_M y θ , caracterizan siempre a los problemas de pandeo por rotación y flexión. Con el análisis efectuado se dispone de las ecuaciones (9), (11) y (18), que derminan un sistema de tres ecuaciones, y que son las siguientes:

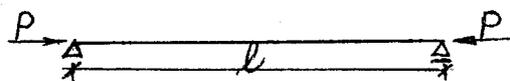
$$(19) \begin{cases} 1) E J_x v_M'' + P v_M = 0 & J_x = \text{inercia de sección armada respecto eje x-x} \\ 2) E J_y (1 - P \bar{\gamma}) u_M'' + P u_M + P y_M \theta = 0 & C_w \text{ módulo de alabeo de sección armada} \\ 3) E C_M \theta''' + (\sigma J_{pM} - G J_t) \theta' + \sigma F u_M' y_M = 0 \end{cases}$$

Puede observarse que la primera de ellas, es independiente, pero las dos últimas constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales, con dos incognitas: u y θ . Pero este grupo de ecuaciones resuelve el problema cuando ambos apoyos son simples, por eso es un sistema restringido. Cuando los apoyos tienen otras vinculaciones, se debe usar la ecuación general, y ella se consigue derivando dos veces las dos primeras, y una vez la última las ecuaciones (19), obteniéndose:

$$(20) \begin{cases} 1) E J_x v_M^{IV} + P v_M'' = 0 & J_y = \text{inercia de sección armada respecto eje y-y} \\ 2) E J_y (1 - P \bar{\gamma}) u^{IV} + P u'' + P y_M \theta'' = 0 & J_t = \text{módulo de torsión de sección armada} \\ 3) E C_M \theta^{IV} + (\sigma J_{pM} - G J_t) \theta'' + \sigma F u_M'' y_M = 0 \end{cases}$$

$\bar{r}_o = \text{radio de giro polar referido al centro de torsión de la barra armada.}$

4. Criterio americano – El tratamiento que se dá a este sistema de ecuaciones (19), es el siguiente:

Las elásticas y el giro angular que se toman es: 

$$(21) \quad v = A_1 \text{sen}(\pi/l)x \quad u = A_2 \text{sen}(\pi/l)x \quad \theta = A_3 \text{sen}(\pi/l)x$$

y teniendo presente que: $C_M = C_w$, $\bar{r}_o = \text{radio de giro polar respecto del centro de corte, } y_M = y_o$
de sección armada

$$(22) \quad N_x = \pi^2 E J_x / l_x^2 \quad \bar{N}_{yt} = \frac{\pi^2 E J_y (1 - P \bar{\gamma})}{(l_y)^2} \quad N_t = [\pi^2 E C_w / l_y^2 + G J_t] / \bar{r}_o^2$$

reemplazando las elásticas, en las tres ecuaciones (19):

$$[E J_x (\pi^2 / l_x^2) - N] A_1 = 0 \longrightarrow (N_x - N) A_1 = 0$$

$$(23) \left[\frac{\pi^2 E J_y (1 - P \bar{\gamma})}{(l_y)^2} - N \right] A_2 - N y_o A_3 = 0 \longrightarrow (\bar{N}_{yt} - N) A_2 - N y_o A_3 = 0$$

$$\{ [E C_w (\pi^2 / l_y^2) + G J_t] / \bar{r}_o^2 - N \bar{r}_o^2 \} A_3 - N y_o A_2 = 0 \longrightarrow (N_t - N) \bar{r}_o^2 A_3 - N y_o A_2 = 0$$

y para que este sistema de ecuaciones homogeneas tengan solución, el determinante de la matriz debe ser nulo:

$$\begin{vmatrix} (N_x - N) & 0 & 0 \\ 0 & (\bar{N}_y - N) & -N y_o \\ 0 & -N y_o & (N_t - N) \bar{r}_o^2 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$(24) \quad (N_x - N) (\bar{N}_y - N) (N_t - N) \bar{r}_o^2 - (N_x - N) N^2 y_o^2 = 0 \quad \text{sacando factor común}$$

$$(25) \quad (N_x - N) [(\bar{N}_y - N) (N_t - N) \bar{r}_o^2 - N^2 y_o^2] = 0$$

una solución de esta ecuación es cuando $(N_x - N) = 0$, y se tiene pandeo por flexión según eje x-x, y es independiente del otro eje y-y, y la otra solución es cuando:

$$(26) \quad [(\bar{N}_y - N) (N_t - N) \bar{r}_o^2 - N^2 y_o^2] = 0$$

desarrollandolo se llega a la siguiente ecuación algebraica de segundo grado:

$$(27) \quad [1 - (y_o/\bar{r}_o)^2] N^2 - (\bar{N}_y + N_t) N + \bar{N}_y N_t = 0 \quad [1 - (y_o/\bar{r}_o)^2] = H$$

resolviendo la ecuación:

$$(28) \quad N_{cr, ft} = \frac{\bar{N}_y + N_t \pm \sqrt{(\bar{N}_y + N_t)^2 - 4 \bar{N}_y N_t H}}{2 H} = \frac{\bar{N}_y + N_t}{2 H} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \bar{N}_y N_t H}{(\bar{N}_y + N_t)^2}} \right]$$

dividiendo esta carga crítica por la sección, se obtendrá la tensión crítica:

$$(29) \quad \sigma_{cr, ft} = \frac{\bar{\sigma}_{cr y_l} + \sigma_{cr t}}{2 H} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4 \bar{\sigma}_{cr y_l} \sigma_{cr t} H}{(\bar{\sigma}_{cr y} + \sigma_{cr t})^2}} \right] \quad \begin{aligned} \bar{\sigma}_{cr y_l} &= \pi^2 E / (\lambda_{y_l})^2 = \bar{F}_{ey} \\ \sigma_{cr t} &= \frac{[\pi^2 E C_w / \bar{l}^2] + G J_t}{A \bar{r}_o^2} \end{aligned}$$

La bibliografía americana a estas tensiones críticas, las denomina como \bar{F}_{ey} , F_{ez} y F_e , quedando la clásica ecuación reglamentaria general:

$$(30) \quad F_e = \frac{\bar{F}_{ey_l} + F_{ez}}{2H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \cdot \bar{F}_{ey_l} \cdot F_{ez} \cdot H}{(\bar{F}_{ey_l} + F_{ez})^2}} \right]$$

siendo $\bar{F}_{ey_l} = \pi^2 E / (\lambda_{m,y})^2$ $F_{ez} = \{[\pi^2 E C_w / (k_z \ell_y)^2] + G J_t\} / A r_o^2$ (31)

En el sistema americano todas las medidas son en pulgadas ó pies.

ℓ = longitud no arriostrada. k_y, k_z = factor de longitud efectiva. r_y = radio de giro según y-y de sección armada

$(\bar{r}_o)^2 = y_o^2 + r_y^2 + r_x^2$. r_x = radio de giro según eje x-x. y_o = coordenada centro corte de sección armada

C_w = módulo de alabeo, barra armada. J_t = momento de inercia torsional, sección armada

La ecuación (29) corresponde a apoyos simples, se debería tener la general, para cualquier tipo de apoyos, si se consideran apoyos empotrados, las elásticas a considerar serían:

$$(32) \quad v = C_1 [1 - \cos(2\pi/\ell)x] \quad u = C_2 [1 - \cos(2\pi/\ell)x] \quad \theta = C_3 [1 - \cos(2\pi/\ell)x]$$

$$N_x = \pi^2 E J_x / (0,5 \ell_x)^2 \quad \bar{N}_{yi} = \frac{\pi^2 E J_y (1 - P\bar{\gamma})}{(0,5 \ell_x)^2} \quad N_t = \{[\pi^2 E C_w / (0,5 \ell_y)^2] + G J_t\} / \bar{r}_o^2$$

Siguiendo el procedimiento anterior se arriba a la misma ecuación (29), pero en este caso las tensiones críticas son las siguientes:

$$(33) \quad \sigma_{cr yi} = F_{eyi} = \pi^2 E / (\lambda_{myi})^2 \quad \sigma_{cr t} = F_{ez} = \{[\pi^2 E C_w / (0,5 \ell_y)^2] + G J_t\} / A \bar{r}_o^2$$

y en el caso mas general de empotramiento elástico ó perfecto será:

$$(34) \quad \sigma_{cr yi} = F_{eyi} = \pi^2 E / (\lambda_{myi})^2 \quad \sigma_{cr t} = F_{ez} = \{[\pi^2 E C_w / (k_z \ell)^2] + G J_t\} / A \bar{r}_o^2$$

con la tensión crítica ideal $\sigma_{cr, ft} = F_e$ se obtiene la esbeltez de comparación de la barra armada

$$(35) \quad \pi^2 E / F_e = (\lambda_{vim})^2 \quad \bar{r}_o = \text{radio de giro polar referido al centro de torsión de sección armada}$$

y con la anterior reglamentación AISC, se puede calcular la tensión crítica:

$$\lambda_{vim} < C_c \longrightarrow \sigma_{cr, ft} = [1 - (\lambda_{vim})^2 / (2 C_c^2)] \sigma_F \quad (36)$$

$$\lambda_{vim} > C_c \longrightarrow \sigma_{cr, ft} = \pi^2 E / (\lambda_{vim})^2 \quad (37)$$

aplicando el coeficiente de seguridad correspondiente, se obtiene la tensión admisible.

Conociendo la tensión crítica ideal, se podría seguir otro camino, como calcular la esbeltez de comparación ideal λ_{vim} . Reemplazando en la ecuación (35) el valor F_e dado en ecuación (30) y realizando los reemplazos de las tensiones dadas en ecuaciones (34), y realizando además algunas transformaciones, se llega a calcular la esbeltez de comparación, con la siguiente expresión:

$$\lambda_{vim} = \sqrt{\frac{2 (\lambda_{my})^2 H \bar{r}_o^2}{(\bar{r}_o^2 + c^2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 c^2 H \bar{r}_o^2}{(\bar{r}_o^2 + c^2)^2}}\right]}} = \frac{(k_y \ell_y)}{r_{yi} \sqrt{\frac{(\bar{r}_o^2 + c^2)}{2 H \bar{r}_o^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 c^2 H \bar{r}_o^2}{(\bar{r}_o^2 + c^2)^2}}\right]}} \quad (38)$$

siendo el radio de giro de flexotorsión; de sección armada

$$(39) \quad r_{fl,t} = r_{yi} \sqrt{\frac{(\bar{r}_o^2 + c^2)}{2 H r_o^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 c^2 H \bar{r}_o^2}{(\bar{r}_o^2 + c^2)^2}} \right]}$$

y el radio de torsión es:

$$(40) \quad c = \sqrt{\frac{C_M + 0,039 (\beta \ell)^2 J_t}{J_y}}$$

(Ver publicación del autor "Pandeo por flexotorsión". 2.005, ecuación (60) del capítulo II).

4.1 – Ecuación en función de los radios de giros r_y , r_t , y como incognita el radio de giro r_{ft} de flexotorsión, en secciones de simple simetría. La ecuación final a que se llega, también puede presentarse de otra manera, si a la ecuación (27) se la divide por A^2 , esta queda en función de las tensiones:

$$(41) \quad H (\sigma_{cr,ft})^2 - (\bar{\sigma}_{yi} + \sigma_t) \sigma_{cr,ft} + \bar{\sigma}_{yi} \sigma_t = 0$$

reemplazando

$r_t =$ de ecuación (52) del cap. anterior "Pandeo por torsión"

$$(42) \quad \sigma_{cr,ft} = \pi^2 E (r_{ft})^2 / (k \ell)^2 \quad \bar{\sigma}_{yi} = \pi^2 E (r_{yi})^2 / (k_y \ell_y)^2 \quad \sigma_t = \pi^2 E (r_t)^2 / (k_t \ell)^2$$

queda: (Las tensiones y radios de giro, pertenecen a la barra armada)

$$(43) \quad H (r_{ft})^4 - (r_{yi}^2 + r_t^2) (r_{ft})^2 + r_t^2 r_{yi}^2 = 0$$

resolviendo la ecuación bicuadrada, r_{ft} es:

$$(44) \quad r_{fl,t}^2 = \frac{r_{yi}^2 + r_t^2 \pm \sqrt{(r_{yi}^2 + r_t^2)^2 - 4 H r_{yi}^2 r_t^2}}{2 H} = \frac{r_{yi}^2 + r_t^2}{2 H} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 H r_{yi}^2 r_t^2}{(r_{yi}^2 + r_t^2)^2}} \right]$$

siendo r_y el radio de giro según eje y-y, y r_t es el radio de giro de torsión que viene dado por las ecuaciones, correspondientes a la columna armada, y r_{ft} es el radio de giro de flexotorsión. La ecuación (44) brinda dos raíces, se debe tomar el signo menos de la raíz, que provee el menor radio de giro, y por lo tanto la mayor esbeltez, y en consecuencia la menor tensión crítica, que es la solución al problema.

A la misma ecuación (44) se hubiese llegado, si en la ecuación (29) se reemplazaran las tensiones críticas en función de los radios de giro, es decir con las ecuaciones (42), haciendo las simplificaciones respectivas la ecuación queda igual, se siguió el primer camino para ver a que ecuación se llegaba: "a una ecuación bicuadrada".

De aquí en mas, el camino que se sigue es similar al anterior, con el valor del radio de giro de flexotorsión r_{ft} , se calcula la esbeltez de comparación $\lambda_{vi} = \ell / r_{ft}$ y luego en función de ésta las tensiones críticas:

$$\lambda_{vi} \leq C_c \longrightarrow \sigma_{cr,ft} = [1 - (\lambda_{vi})^2 / (2 C_c^2)] \sigma_F$$

$$\lambda_{vi} > C_c \longrightarrow \sigma_{cr,ft} = \pi^2 E / (\lambda_{vi})^2$$

y según norma anterior AISC (1063), a estas tensiones críticas se les aplica el coeficiente de seguridad correspondiente.

4.2 - Ecuación en función de las esbelteces λ_{yi} , λ_t , y como incognita la esbeltez de comparación λ_{vi} , de flexotorsión. Otra forma de presentar la ecuación es en función de las esbelteces λ_y , λ_t , y como incognita λ_{vi} . Reemplazando en ecuación (43) sus radios de giro por:

$$(45) \quad r_{ft} = l / \lambda_{vi} \quad r_y = l / \lambda_{yi} \quad r_t = l / \lambda_t$$

queda:

$$(46) \quad \frac{H}{(\lambda_{vi})^4} - \left[\frac{1}{(\lambda_{yi})^2} + \frac{1}{(\lambda_t)^2} \right] \frac{1}{(\lambda_{vi})^2} + \left[\frac{1}{(\lambda_{yi})^2} \cdot \frac{1}{(\lambda_t)^2} \right] = 0$$

multiplicando por $\lambda_{yi}^2 \cdot \lambda_t^2 \cdot (\lambda_{vi})^4$ viene:

$$(47) \quad (\lambda_{vi})^4 - (\lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2) (\lambda_{vi})^2 + H (\lambda_{yi}^2 \lambda_t^2) = 0$$

ecuación bicuadrada, que resolviendola dá la incognita λ_{vi} :

$$(48) \quad \lambda_{vi}^2 = \frac{(\lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2) \pm \sqrt{(\lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2)^2 - 4 H \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2}}{2}$$

y en este caso corresponde tomar el signo positivo, pues a mayor esbeltez corresponde una menor tensión crítica; factorizando queda:

$$(49) \quad \lambda_{vi}^2 = \frac{(\lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2)}{2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 H \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2}{(\lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2)^2}} \right]$$

Con el resultado de esta ecuación, el problema se acorta un poco, pues se dispone de la esbeltez directamente, y entonces la carga crítica viene en función de la esbeltez:

$$\lambda_{vi} \leq \lambda_c \longrightarrow \sigma_{cr,ft} = [1 - (\lambda_{vi}^2 / 2 C_c^2)] \sigma_F$$

$$\lambda_{vi} > C_c \longrightarrow \sigma_{cr,ft} = \pi^2 E / (\lambda_{vi})^2$$

Puede observarse que, la solución de la ecuación a la que se arriba, tiene una similitud con las anteriores, en las cuales figuran el valor de las tensiones (ecuación 29), ó en la que se reemplaza el valor de $\sigma_{cr,ft}$ por el valor de Γ_{ft} , Γ_y ó Γ_t . Se debe tener muy en cuenta cuando se trabaja con las diferentes ecuaciones (29, 44, ó 49), el signo de la raíz cuadrada, pues en algunos casos, se debe tomar el signo positivo y en otros el negativo, todo depende de la incognita que se tenga.

5. - Secciones que no tienen ningún eje de simetría. Sistema de ecuaciones al que se arriba. Soluciones. Como la sección analizada anteriormente es de simple simetría, una de las coordenadas del centro de corte es nula ($x_o = 0$), pero cuando se trata de una sección sin ninguna simetría, dichas coordenadas no son nulas, y se pueden presentar dos casos: 1) cuando uno de los ejes principales corta a los dos perfiles, 2) cuando ninguno de los dos ejes principales, los corta. En el primer caso se llega al sistema siguiente

$$(50) \begin{cases} 1) E J_x v_M^{IV} + N v_M'' + N x_M \theta'' = 0 \\ 2) E J_y (1 - N \bar{\gamma}) u^{IV} + N u_M'' + N y_M \theta'' = 0 \\ 3) E C_M \theta^{IV} + (N \bar{r}_o^2 - G J_t) \theta'' + N y_M u_M'' + N x_M v_M'' = 0 \end{cases}$$

Puede verse que en las tres aparece el giro θ , por lo tanto ninguna de ellas es independiente, reemplazando las elásticas expuestas anteriormente, se llega a plantear las ecuaciones siguientes:

$$(51) \begin{cases} 1) [\pi^2 E J_x / (l_x)^2 - N] A_1 - N x_M A_3 = 0 & N_x = \pi^2 E J_x / l_x^2 \\ 2) \left[\frac{\pi^2 E J_y (1 - P \bar{\gamma})}{(l_y)^2} - N \right] A_2 - N y_M A_3 = 0 & \bar{N}_{y_t} = \frac{\pi^2 E J_y (1 - N \bar{\gamma})}{(l_y)^2} \\ 3) \{ [\pi^2 E C_M / (l_t)^2 + G J_t] / \bar{r}_o^2 - N \} \bar{r}_o^2 A_3 - N y_M A_2 - N x_M A_1 = 0 \end{cases}$$

Para que haya solución, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo.

$$(N_t = [\pi^2 E C_M / (l_t)^2 + G J_t] / \bar{r}_o^2)$$

$$\begin{vmatrix} (N_x - N) & 0 & -N x_M \\ 0 & (\bar{N}_{y_t} - N) & -N y_M \\ -N x_M & -N y_M & (N_t - N) \bar{r}_o^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (52)$$

desarrollando el determinante viene:

$$(53) \quad (N_x - N) (\bar{N}_{y_t} - N) (N_t - N) \bar{r}_o^2 - (\bar{N}_{y_t} - N) N^2 x_M^2 - (N_x - N) N^2 y_M^2 = 0$$

$$(54) - (N - \bar{N}_x) (N - \bar{N}_y) (N - N_t) + (N - \bar{N}_y) N^2 (x_M / \bar{r}_o)^2 + (N - \bar{N}_x) N^2 (y_M / \bar{r}_o)^2 = 0$$

cambiando el signo viene:

$$(55) (N - \bar{N}_x) (N - \bar{N}_y) (N - N_t) - (N - \bar{N}_y) N^2 (x_M / \bar{r}_o)^2 - (N - \bar{N}_x) N^2 (y_M / \bar{r}_o)^2 = 0$$

La norma americana a las coordenadas del centro de corte las denomina x_o e y_o , y por lo tanto reemplazando en la ecuación (55) $y_M = y_o$, y $x_M = x_o$, y presentando a la ecuación, como una expresión algebraica de tercer grado, con la cual es posible trabajar con mayor comodidad, dividiendo esta carga crítica por la sección, queda finalmente:

$$(56) HF_e^3 + \left[(1/\bar{r}_o^2) (x_o^2 F_{eyi} + y_o^2 F_{ex}) - (F_{ex} + F_{eyi} + F_{et}) \right] F_e^2 + (F_{eyi} F_{ex} + F_{eyi} F_{et} + F_{ex} F_{et}) F_e - (F_{ex} F_{eyi} F_{et}) = 0$$

Esta ecuación cúbica, brinda tres raíces, de las cuales se toma la menor, que es la que resuelve el problema; las tres raíces de la ecuación son reales, matemáticamente se demuestra que toda ecuación cúbica, que proviene de una matriz que guarda simetría respecto de la diagonal principal, tiene sus tres raíces reales, y la matriz (52) está en esas condiciones.

k_z = factor de longitud efectiva para pandeo por torsión.

E = módulo de elasticidad (ksi) ó Kg/cm².

G = módulo transversal de elasticidad (ksi) ó Kg/cm².

C_w = módulo de alabeo (pulg.⁶) ó cm⁶.

J_t = momento de inercia torsional (pulg.⁴) ó cm⁴.

J_x, J_y = momento de inercia respecto de los ejes principales, x - y (pulg.⁴) ó cm⁴.

x_o, y_o = coordenadas del centro de corte, con respecto al centro de gravedad (pulg.) ó cm

$$\bar{r}_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + (J_x + J_y)/A} \quad H = 1 - [(x_o^2 + y_o^2) / \bar{r}_o^2]$$

$$F_{ex} = \pi^2 E / (k_x \ell_x / r_x)^2 \quad F_{eyi} = \pi^2 E / (\lambda_{yi})^2$$

$$F_{et} = [\pi^2 E C_w / (k_t \ell_y)^2 + G J_t] / (A \bar{r}_o^2)$$

ℓ = longitud no arriostrada. k_x, k_y = factor de longitud efectiva, según ejes x - y.

\bar{r}_o = radio de giro polar respecto del centro de corte (pulg.) ó cm.

F_{ex} = tensión crítica ideal de Euler, con respecto al pandeo según eje x-x (ksi).

F_{ey} = tensión crítica ideal de Euler, con respecto al pandeo según eje y-y (ksi).

F_{et} = tensión crítica ideal de pandeo por torsión (ksi).

r_x, r_y = radio de giro respecto de los ejes principales (pulg.).

A = superficie de la sección transversal de la barra (pulg²)

5.1 – Ecuación de tercer grado en función de los radios de giro. Si en la ecuación (56), a las tensiones se las reemplaza en función de sus radios de giro:

$$F_{ex} = \pi^2 E (r_x)^2 / (k_x \ell_x)^2 \quad F_{ey} = \pi^2 E (r_y)^2 / (k_y \ell_y)^2 \quad F_{et} = \pi^2 E (r_t)^2 / (k_t \ell)^2$$

queda:

$$(57) \quad H (r_{ft}^2)^3 + \left[\frac{1}{r_o^2} (x_o^2 r_{yi}^2 + y_o^2 r_x^2) - (r_x^2 + r_{yi}^2 + r_t^2) \right] (r_{ft}^2)^2 + (r_x^2 r_{yi}^2 + r_{yi}^2 r_t^2 + r_x^2 r_t^2) r_{ft}^2 - (r_x^2 r_{yi}^2 r_t^2) = 0$$

Puede verse que la ecuación es similar al de las tensiones (en realidad es una ecuación de sexto grado, pero como su incognita aparece al cuadrado, se transforma en una de tercer grado, y no se tienen en cuenta las raíces negativas, también se la llama ecuación bicúbica), con la única diferencia que aquí aparecen como coeficientes de la ecuación los radios de giro, y como incógnitas los radios de giro de flexotorsión al cuadrado, y el radio de giro buscado es la raíz cuadrada del menor de los valores hallados. Con este radio de giro se busca la esbeltez y en función de esta la tensión crítica.

5.2 – Ecuación de tercer grado en función de las esbelteces. Reemplazando en la ecuación (56) las tensiones en función de las esbelteces:

$$F_{ex} = \pi^2 E / \lambda_x^2 \quad F_{ey} = \pi^2 E / \lambda_{yi}^2 \quad F_{et} = \pi^2 E / \lambda_t^2$$

viene:

$$H \cdot \frac{1}{(\lambda_{ft}^2)^3} + \left[\frac{1}{r_o^2} \left(\frac{x_o^2}{\lambda_{yi}^2} + \frac{y_o^2}{\lambda_x^2} \right) - \left(\frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_{yi}^2} + \frac{1}{\lambda_t^2} \right) \right] \frac{1}{(\lambda_{ft}^2)^2} + \left[\frac{1}{\lambda_x^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{yi}^2} + \frac{1}{\lambda_{yi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} + \frac{1}{\lambda_x^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} \right] \frac{1}{\lambda_{ft}^2} - \frac{1}{\lambda_x^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{yi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} = 0 \quad (58)$$

multiplicando por $\lambda_x^2 \cdot \lambda_{yi}^2 \cdot \lambda_t^2 \cdot \lambda_{ft}^6$ viene:

$$(59) \quad (\lambda_{ft}^2)^3 - (\lambda_x^2 + \lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2)(\lambda_{ft}^2)^2 + [1/\bar{\Gamma}_0^2 (x_0^2 \lambda_x^2 \lambda_t^2 + y_0^2 \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2) - (\lambda_x^2 \lambda_{yi}^2 + \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2 + \lambda_x^2 \lambda_t^2)](\lambda_{ft}^2) + H \lambda_x^2 \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2 = 0$$

Aquí también se ha llegado a una ecuación bicúbica, en la cual las incógnitas son las esbelteces λ_{ft} , y de las raíces se debe tomar la mayor, porque ésta brinda la menor tensión crítica.

5.3 – Secciones que no tienen ningún eje de simetría. Sistema de ecuaciones al que se arriba. 2º caso: cuando ninguno de los ejes principales corta a la sección armada, (son ejes inmateriales). Soluciones. En este caso en particular, los ejes principales son inmateriales y las esbelteces son ideales. El análisis se realiza en la misma forma anterior, y se arriba al sistema de ecuaciones, parecidas a las anteriores;

$$(60) \quad \begin{cases} 1) \ E J_x (1 - N \bar{\gamma}_x) v_M^{IV} + N v_M'' + N x_M \theta'' = 0 \\ 2) \ E J_y (1 - N \bar{\gamma}_y) u_M^{IV} + N u_M'' + N y_M \theta'' = 0 \\ 3) \ E C_M \theta^{IV} + (N \bar{\Gamma}_0^2 - G J_t) \theta'' + N y_M u_M'' + N x_M v_M'' = 0 \end{cases}$$

Puede verse que en las tres aparece el giro θ , por lo tanto ninguna de ellas es independiente, reemplazando las elásticas expuestas anteriormente, se llega a plantear las ecuaciones siguientes:

$$(61) \quad \begin{cases} 1) \ \left[\frac{\pi^2 E J_x (1 - N \bar{\gamma}_x) - N}{(l_x)^2} \right] A_1 - N x_M A_3 = 0 & \bar{N}_{xi} = \frac{\pi^2 E J_x (1 - N \bar{\gamma}_x)}{(l_x)^2} \\ 2) \ \left[\frac{\pi^2 E J_y (1 - N \bar{\gamma}_y) - N}{(l_y)^2} \right] A_2 - N y_M A_3 = 0 & \bar{N}_{yi} = \frac{\pi^2 E J_y (1 - N \bar{\gamma}_y)}{(l_y)^2} \\ 3) \ \left\{ \left[\frac{\pi^2 E C_M}{(l_t)^2} + G J_t \right] / \bar{\Gamma}_0^2 - N \right\} \bar{\Gamma}_0^2 A_3 - N y_M A_2 - N x_M A_1 = 0 \end{cases}$$

Para que haya solución, el determinante de la matriz de los coeficientes debe ser nulo:

$$N_t = \left[\frac{\pi^2 E C_M}{(l_t)^2} + G J_t \right] / \bar{\Gamma}_0^2$$

$$\begin{vmatrix} (\bar{N}_{xi} - N) & 0 & -N x_M \\ 0 & (\bar{N}_{yi} - N) & -N y_M \\ -N x_M & -N y_M & (N_t - N) \bar{\Gamma}_0^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (62)$$

desarrollando el determinante viene:

$$(63) \quad (\bar{N}_{xi} - N) (\bar{N}_{yi} - N) (N_t - N) \bar{\Gamma}_0^2 - (\bar{N}_{yi} - N) N^2 x_M^2 - (\bar{N}_{xi} - N) N^2 y_M^2 = 0$$

$$(64) - (N - \bar{N}_{xi})(N - \bar{N}_{yi})(N - N_t) + (N - \bar{N}_{yi})N^2(x_M/\bar{r}_o)^2 + (N - \bar{N}_{xi})N^2(y_M/\bar{r}_o)^2 = 0$$

cambiando el signo viene:

$$(65) (N - \bar{N}_{xi})(N - \bar{N}_{yi})(N - N_t) - (N - \bar{N}_{yi})N^2(x_M/\bar{r}_o)^2 - (N - \bar{N}_{xi})N^2(y_M/\bar{r}_o)^2 = 0$$

La norma americana a las coordenadas del centro de corte las denomina x_o e y_o , y por lo tanto reemplazando en la ecuación (55) $y_M = y_o$, y $x_M = x_o$, y presentando a la ecuación, como una expresión algebraica de tercer grado, con la cual es posible trabajar con mayor comodidad, dividiendo esta carga crítica por la sección, queda finalmente:

$$(66) HF_e^3 + \left[\left(\frac{1}{\bar{r}_o^2} \right) (x_o^2 F_{eyi} + y_o^2 F_{exi}) - (F_{exi} + F_{eyi} + F_{et}) \right] F_e^2 + \\ + (F_{eyi}F_{exi} + F_{eyi}F_{et} + F_{exi}F_{et})F_e - (F_{exi}F_{eyi}F_{et}) = 0$$

Esta ecuación cúbica, brinda tres raíces, de las cuales se toma la menor, que es la que resuelve el problema; las tres raíces de la ecuación son reales, matemáticamente se demuestra que toda ecuación cúbica, que proviene de una matriz que guarda simetría respecto de la diagonal principal, tiene sus tres raíces reales, y la matriz (52) está en esas condiciones.

k_z = factor de longitud efectiva para pandeo por torsión.

E = módulo de elasticidad (ksi) ó Kg/cm^2 .

G = módulo transversal de elasticidad (ksi). ó Kg/cm^2 .

C_w = módulo de alabeo (pulg.⁶) ó cm^6 .

J_t = momento de inercia torsional (pulg.⁴) ó cm^4 , de sección armada

J_x, J_y = momento de inercia respecto de los ejes principales, $x - y$ (pulg.⁴) ó cm^4 , barra armada

x_o, y_o = coordenadas del centro de corte, con respecto al centro de gravedad (pulg.) ó cm .

$$\bar{r}_o = \sqrt{x_o^2 + y_o^2 + (J_x + J_y)/A} \quad H = 1 - [(x_o^2 + y_o^2)/\bar{r}_o^2]$$

$$F_{exi} = \pi^2 E / (k_x \ell_x / r_x)^2 \quad F_{eyi} = \pi^2 E / (\lambda_{yi})^2 = \pi^2 E (r_y)^2 / (k_y \ell_y)^2$$

$$F_{et} = \left[\pi^2 E C_w / (k_t \ell_y)^2 + G J_t \right] / (A \bar{r}_o^2) \text{ de sección armada}$$

ℓ = longitud no arriostrada. k_x, k_y = factor de longitud efectiva, según ejes $x - y$.

\bar{r}_o = radio de giro polar respecto del centro de corte (pulg.) ó cm .

F_{ex} = tensión crítica ideal de Euler, con respecto al pandeo según eje x-x (ksi).

F_{ey} = tensión crítica ideal de Euler, con respecto al pandeo según eje y-y (ksi).

F_{et} = tensión crítica ideal de pandeo por torsión (ksi).

r_x, r_y = radio de giro respecto de los ejes principales (pulg.).

A = superficie de la sección transversal de la barra (pulg^2)

5.4 - Ecuación de tercer grado en función de los radios de giro. Si en la ecuación (56), a las tensiones se las reemplaza en función de sus radios de giro:

$$F_{ex} = \pi^2 E (r_{xi})^2 / (k_x l_x)^2 \quad F_{ey} = \pi^2 E (r_{yi})^2 / (k_y l_y)^2 \quad F_{et} = \pi^2 E (r_t)^2 / (k_t l)^2$$

queda:

$$(67) \quad H (r_{ft}^2)^3 + \left[\frac{1}{r_o^2} (x_o^2 r_{yi}^2 + y_o^2 r_{xi}^2) - (r_{xi}^2 + r_{yi}^2 + r_t^2) \right] (r_{ft}^2)^2 + (r_{xi}^2 r_{yi}^2 + r_{yi}^2 r_t^2 + r_{xi}^2 r_t^2) r_{ft}^2 - (r_{xi}^2 r_{yi}^2 r_t^2) = 0$$

Puede verse que la ecuación es similar al de las tensiones (en realidad es una ecuación de sexto grado, pero como su incognita aparece al cuadrado, se transforma en una de tercer grado, y no se tienen en cuenta las raíces negativas, también se la llama ecuación bicúbica), con la única diferencia que aquí aparecen como coeficientes de la ecuación los radios de giro, y como incognitas los radios de giro de flexotorsión al cuadrado, y el radio de giro buscado es la raíz cuadrada del menor de los valores hallados. Con este radio de giro se busca la esbeltez y en función de esta la tensión crítica.

5.5 - Ecuación de tercer grado en función de las esbelteces. Reemplazando en la ecuación (56) las tensiones en función de las esbelteces:

$$F_{ex} = \pi^2 E / \lambda_{xi}^2 \quad F_{ey} = \pi^2 E / \lambda_{yi}^2 \quad F_{et} = \pi^2 E / \lambda_t^2$$

viene:

$$(68) \quad H \cdot \frac{1}{(\lambda_{ft}^2)^3} + \left[\frac{1}{r_o^2} \left(\frac{x_o^2}{\lambda_{yi}^2} + \frac{y_o^2}{\lambda_{xi}^2} \right) - \left(\frac{1}{\lambda_{xi}^2} + \frac{1}{\lambda_{yi}^2} + \frac{1}{\lambda_t^2} \right) \right] \frac{1}{(\lambda_{ft}^2)^2} + \left[\frac{1}{\lambda_{xi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{yi}^2} + \frac{1}{\lambda_{yi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} + \frac{1}{\lambda_{xi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} \right] \frac{1}{\lambda_{ft}^2} - \frac{1}{\lambda_{xi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_{yi}^2} \cdot \frac{1}{\lambda_t^2} = 0$$

multiplicando por $\lambda_{xi}^2 \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2 \lambda_{ft}^6$ viene:

$$(69) \quad (\lambda_{ft}^2)^3 - (\lambda_{xi}^2 + \lambda_{yi}^2 + \lambda_t^2)(\lambda_{ft}^2)^2 + [1/\bar{r}_0^2 (x_0^2 \lambda_{xi}^2 \lambda_t^2 + y_0^2 \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2) - (\lambda_{xi}^2 \lambda_{yi}^2 + \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2 + \lambda_{xi}^2 \lambda_t^2)](\lambda_{ft}^2) + H \lambda_{xi}^2 \lambda_{yi}^2 \lambda_t^2 = 0$$

Aquí también se ha llegado a una ecuación bicúbica, en la cual las incógnitas son las esbelteces λ_{ft} , y de las raíces se debe tomar la mayor, porque ésta brinda la menor tensión crítica.

6. - Nueva norma americana. Criterio AISC-LRFD. La nueva norma americana AISC-LRFD, calcula la tensión ideal de flexotorsión con ecuación (30), ó ecuación (55) según sea el caso, y en función de la ecuación (35), obtiene la esbeltez de comparación, que corresponde a una barra ideal que pandea por flexión con la misma tensión crítica, que la barra que pandea por flexotorsión, lo importante es obtener la esbeltez:

$$(70) \quad \pi^2 E / F_e = (\lambda_{vi})^2 \dots \lambda_c = (\lambda_{vi} / \pi) \sqrt{F_e / E}$$

y con esta esbeltez λ_c , se calculan las tensiones críticas:

$$\lambda_c \sqrt{Q} \leq 1,5 \dots \sigma_{cr} = \left[Q (0,658)^Q \lambda_c^2 \right] \sigma_F$$

$$\lambda_c \sqrt{Q} > 1,5 \dots \sigma_{cr} = (0,877 / \lambda_c^2) \sigma_F$$

"Pandeo en el campo real de barras de acero - barras de alma llena" de ing. Omar Miño - mayo de 1999.

Para secciones compactas y no compactas $Q = 1,0$, otra manera de proceder es buscar el valor de χ de la tabla correspondiente, y entonces el camino sería:

$$(71) \quad \lambda_c \longrightarrow \chi \longrightarrow \sigma_{cr} = 0,85 \chi \sigma_F \quad \text{ó también}$$

$$(72) \quad \lambda_c \longrightarrow \chi \longrightarrow P_{cr} = 0,85 \chi \sigma_F A > P \quad (\text{factoreado})$$

7. - Criterio europeo. Secciones de simple simetría. El análisis del fenómeno es idéntico al desarrollado anteriormente, es decir ambos criterios (americanos y europeos) coinciden en la determinación de la tensión crítica ideal ó la determinación del λ_{vi} . Los europeos se diferencian de los americanos, porque ellos trabajan con la esbeltez de comparación λ_{vi} , pero la presentan a la misma de otra forma. Si a la ecuación (38), se la multiplica y divide por:

$$(73) \quad \frac{\bar{r}_0^2 + c^2}{2 H \bar{r}_0^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 c^2 H \bar{r}_0^2}{(\bar{r}_0^2 + c^2)^2}} \right] \quad \text{queda finalmente}$$

$$(74) \quad \lambda_{vi} = \frac{\beta l_y}{i_y} \sqrt{\frac{c^2 + i_M^2}{2 c^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4 c^2 i_D^2}{(c^2 + i_M^2)^2}} \right]}$$

los europeos al radio de giro polar r_o lo llaman i_M ($r_o = i_M$), y la norma DIN para diferentes condiciones de borde, y diferentes formas de alabeo la presenta como:

$$\lambda_{Vi} = \frac{\beta l_y}{i_y} \cdot \sqrt{\frac{c^2 + i_M}{2c^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4c^2 [i_p^2 + 0,093 (\beta^2/\beta_o^2 - 1) y_M^2]}{(c^2 + i_M)^2}} \right]} \quad (75)$$

en la que representan:

$i_p^2 = i_x^2 + i_y^2$ = radio de giro polar, con respecto al centro de gravedad, en cm.

$i_M^2 = i_p^2 + y_M^2$ = radio de giro polar, con respecto al centro de esfuerzos cortantes, en cm.

y_M = ordenada del centro de esfuerzos cortantes, tomando como origen en centro de gravedad.

$$c = \sqrt{\frac{C_M (\beta l)^2 / (\beta_o l_o)^2 + 0,039 (\beta l)^2 J_t}{J_y}} \quad (76) \text{ "radio de torsión" de la sección, en cm.}$$

J_t = módulo de torsión, en cm^4 .

$C_M = C_w$ = módulo de alabeo, en cm^6 , con respecto al centro de esfuerzos cortantes.

l = longitud teórica de la barra en cm.

l_o = distancia (de importancia en la torsión), calculada o medida sobre el dibujo, entre los centros de gravedad de los grupos de roblones, ó cordones de soldadura de los dos extremos de la barra.

β = coeficiente de empotramiento a la flexión.

β_o = coeficiente de alabeo.

Se recuerda que la ecuaciones (53) y (54), son aplicables a secciones simplemente simétricas, y la norma DIN 4114 expresa claramente que $\beta = \beta_o = 1,0$, corresponde a un apoyo doblemente articulado en los extremos de la barra, quedando impedidos el giro y los recorridos dentro de su plano de las secciones extremas; pero pueden girar estas secciones extremas alrededor de cualquiera de los ejes x-x e y-y, quedando además libres los recorridos de sus puntos, en la dirección del eje de la barra. Si $\beta = \beta_o = 0,5$ corresponde a un empotramiento perfecto alrededor del eje y-y, y a un alabeo impedido de las secciones extremas. Si las condiciones de vínculo de la barra, corresponden a un empotramiento elástico de la sección extrema alrededor del eje y-y, se tendrá que: $0,5 < \beta < 1,0$ y si el alabeo fuese parcialmente impedido se tiene: $0,5 < \beta_o < 1,0$. En casos practicos usuales, la norma aconseja suponer $0,5 < \beta < 1,0$ y $\beta_o = 0,5$.

Las ecuaciones (64) y (65) responden tambien a una sección de doble simetría, pues realizando las simplificaciones correspondientes, se llega a la ecuación (63) del capítulo anterior, en la cual la

condición de $i_p > c$ está diciendo que existe pandeo por torsión, con una carga menor que la de pandeo por flexión alrededor del eje y-y.

La comprobación que realiza la DIN 4114, es la siguiente: con la determinación de la esbeltez λ_{vi} , entrando en la tabla $\lambda - \Omega$ se extrae el valor del correspondiente Ω_{vi} , y comprobando que:

$$(17) \quad \sigma = P \Omega_{vi} / F < \sigma_{adm}$$

7.1 – Secciones que no tienen ningún eje de simetría. Cuando la sección no tiene simetría, la DIN 4114 no brinda ninguna solución a este problema, sin embargo la amplia bibliografía europea sobre el tema, al igual que la americana, presentan la misma ecuación de tercer grado (no podía ser de otra manera), en la cual la menor de las raíces es la solución buscada, procediendo de la siguiente manera:

$$\pi^2 E / \sigma_{vi} = (\lambda_{vi})^2 \text{ ----- } \lambda_{vi} = \pi \sqrt{E / \sigma_{vi}} \text{ ----- } \Omega_{vi}$$

$$(78) \quad \sigma = P \Omega_{vi} / F < \sigma_{adm}$$

Si se quisiera determinar la esbeltez ideal para estas secciones sin simetría, la ecuación a que se arriba es voluminosa y bastante compleja, es mucho mas simple determinar la tensión ideal y con ella calcular la esbeltez.

7.2. Nueva norma europea. Secciones con doble y simple simetría. La nueva norma europea, calcula la esbeltez ideal λ_{vi} en secciones de doble y simple simetría, y con ella la esbeltez de comparación (con ecuaciones 64 ó 65), $\lambda_{cvi} = \lambda_{vi} / \pi (\sqrt{\sigma_F / E})$, usando la curva c para sacar el valor de χ_c , para luego calcular la tensión crítica ó carga crítica:

$$(79) \quad \sigma_k = \chi_c \sigma_F \geq \sigma \text{ (factoreado)} \quad N_K = \chi_c \sigma_F A \geq N \text{ (factoreado)}$$

Este es el camino que siguen los europeos, pero tambien aceptan calcular la tensión ideal de pandeo por flexotorsión $\sigma_{ki,ft}$ con ecuación (30) y luego determinar λ_{vi} con ecuación (35) ó $\lambda_{cvi} = \sqrt{\sigma_F / \sigma_{ki,ft}}$, ó calcular directamente λ_{vi} con ecuación (38) ó (49), pues todo esto proviene de un mismo razonamiento, como se demostrara en los párrafos anteriores.

7.3 Nueva norma europea. Secciones sin simetría. La norma europea usa en estos casos la ecuación de tercer grado (55), en la cual la menor de las tres raíces corresponde a la tensión crítica ideal buscada, con la cual se determina la esbeltez de flexotorsión, y luego el camino es similar a lo anterior, usando siempre la curva c.

8. Comparación entre la norma AISC-LRFD y la norma europea. La diferencia que existe entre ambas normas son las siguientes: la americana calcula la tensión ó carga crítica con la única curva que tiene, mientras que la europea toma la curva c,

B I B L I O G R A F I A

- 1) Charles G. Salmon "Steel Structures – Design and Behavior". Harper & Row, publishers - 2.008
- John E. Johnson. (método de DFCR).
- 2) Edwin Gaylord Jr "Design of Steel Structures" Mc. Grow Hill – 1992.
Charles Gaylord.
- 3) Jack C. Mc Cormac "Design of Steel Structures LRFD Method" Harper & Row, Publishers, Inc
New York
- 4) Jaime Marco García. "Fundamentos para el cálculo y diseño de estructuras de acero". Mc Grow Hill – (normas europeas y AISC-LRFD) – 1997.
- 5) Miguel A. Garcimartin. "Estructuras Metálicas" – Mundi-Prensa. 1998.
- 6) C. J. Zahn "Effect of conector Spacing and Flexural-Torsional" Buckling on doubl
Geerhard Haaijer angle. Compresive Strength. Enginnering Journal – 1998.
- 7) Farhagn Aslani Analytical criterion for Stich Strength of built-up Compresión member
Subaash C. Goel 1.992
- 8) Farhang Aslani Analytical criterion for Bucklyng strength of buil-up compresión mem-
SubaaSsh C. Goel bers. 1.993
- 9) Trahair N. S. Journal of Structural Engineering ASCE – Nov 2.005
Rasmussen K. J. R.
- 10) Trahair N. S. Journal of Structural Engineering ASCE – July 2.005
- 11) Kim S. E., Lee J Journal of Constructional Steel Research – 58 - 2.002
- 12) Trahair N. S. The Engineering Structures – 2001
- 13) Kollar L. P. International Journal of Solids and Structures – 38 - 2001
- 14) Omar Miño – "Pandeo en el Campo Real de Barras de Acero" – Norma de la Convención Euro-
pea de la Construcción Metálica – DIN 18.800 – AISC-LRFD. – Universidad Na-
cional de Rosario – Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Edi-
tada por CIRSOC (Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales).
- 15) Eurocodigo 3 – "Proyecto de Estructuras de Acero" – 1996 – (versión española).
- 16) Eurocodigo 1 - "Bases de Proyecto y Acciones en Estructuras" – 1997 – (versión española).
- 17) Norma Americana AISC-LRFD - Versión original en inglés. – 2.005

- 18) Omar Miño - ———— "Pandeo en el Campo Real de Barras Metálicas – Nueva Norma Europea de la Construcción Metálica 1984" – Curso de Pos-grado dictado en la Facultad de Ingeniería de Rosario en 1987.
- 19) Omar Miño - ———— "Determinación de Cargas Críticas en Barras Metálicas Según Teoría de K. Jezek" – Trabajo presentado en las IV Jornadas Argentinas de Ingenieros de Ingeniería Estructural – agosto de 1984.
- 20) Omar Miño - ———— "Determinación de Cargas Críticas en Barras Metálicas Según Teoría de Jezek". Ciencia y Técnica – Vol. 1 N° 5 (segundo período) agosto de 1985 y Vol. 2 N° 6 (segundo período) noviembre de 1985 - Centro de Estudiantes de Ingeniería "La Línea Recta" de U.B.A.
- 21) Omar Miño - ———— "Pandeo en el Campo Real de Barras Metálicas – Nueva norma Europea y DIN 18.800" – Curso de Pos-grado dictado en la Asociación de Graduados de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Tecnológica Nacional de Rosario – agosto de 1991.
- 22) Miño Omar - ———— "Torsión uniforme – Torsión no uniforme – Torsión Mixta - Pandeo por torsión. – Publicación del Centro de Estudiantes de Ingeniería de UBA "La línea recta" – Abril de 1985.
- 23) Miño Omar - ———— "Pandeo en el campo real de barras de acero, de alma llena". Nueva norma americana AISC - LRFD. Nueva norma europea. DIN 18.800. Comparaciones Mayo 1999.
- 24) Miño Omar - ———— "Pandeo en el campo real de barras de acero armadas". Nueva norma americana AISC - LRFD. Nueva norma europea. DIN 18.800. Comparaciones. Febrero 2.000
- 25) Miño Omar - ———— "Torsión no uniforme – Torsión Mixta - Pandeo por torsión. – Pandeo por flexotorsión, en el campo real de barras de acero, de alma llena". – Nueva norma americana AISC - LRFD. Nueva norma europea. DIN 18.800. Comparaciones – Diciembre 2005

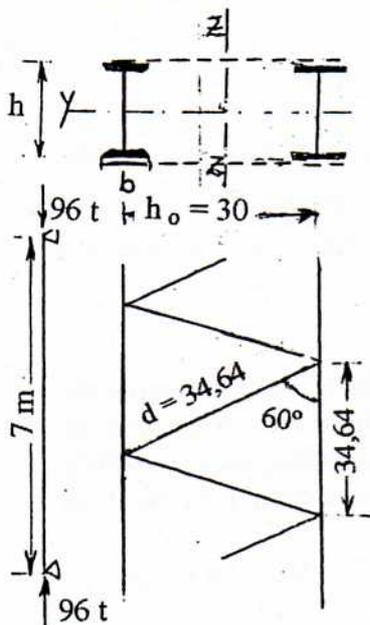
A P L I C A C I O N E S

P R A C T I C A S

**Ejemplos resueltos con los dos reglamentos
nuevos: Americano y Europeo**

Diciembre de 2,008

Ejercicio 1. - Una barra armada, compuesta por dos perfiles doble te normales, separados de 30 cm, con diagonales de angulares de alas iguales 30 x 3 mm, formando un ángulo con la vertical de 60°, con un apoyo que divide la luz en el sentido del eje y-y en dos partes iguales, como puede verse en el esquema, luz 7,00 m con una carga de 96 t, y la carga es un 50% permanente y el otro 50% es principal ó viva. Verificar la barra.



D A T O S : perfil normal doble te 200 mm

$$A = 33,4 \times 2 = 66,8 \text{ cm}^2 \quad A_1 = 33,4 \text{ cm}^2 \quad i_y = 8,00 \text{ cm}$$

$$i_z = 1,87 \text{ cm} \quad \sigma_F = 2,55 \text{ t/cm}^2 \quad b = 90 \text{ mm}$$

$$t_w = 7,5 \text{ mm} \quad t = 1,13 \text{ cm} \quad J_y = 2.140 \times 2 = 4.280 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad J_z = 117 \text{ cm}^4$$

A m e r i c a n o

Página 87 - tabla B.5.1

$$b/2t < \lambda_r \text{ (alas)} \quad \lambda_r = 0,56 \sqrt{E/\sigma_F}$$

$$9 / (2 \times 1,13) = 3,98 < \lambda_r = 0,56 \sqrt{(2.100/2,55)} = 16,07$$

$$h_c / t_w < \lambda_r \text{ (alma)} \quad \lambda_r = 1,49 \sqrt{E/\sigma_F}$$

$$h_c / t_w = 16,24 / 0,75 = 21,65 < \lambda_r = 1,49 \sqrt{2.100/2,55} = 42,76$$

de acuerdo a estos resultados no habrá pandeo local antes de la carga crítica.

$$1,2 D + 1,6 L = 1,2 \times 0,5 + 1,6 \times 0,5 = 1,40$$

$$P = 1,40 \times 96 \text{ t} = 134,4 \text{ t} \quad \text{carga factoreada ó mayorada}$$

$$\text{según eje y-y} \quad \lambda_y = 350 / 8,0 = 43,75 \quad \lambda_{cy} = (43,85 / \pi) \sqrt{2,55 / 2.100} = 0,486$$

$$\chi = 0,7703 \quad P_{cry} = 0,7703 \times 2,55 \times 2 \times 33,4 = 131,212 \text{ t} < 134,4 \text{ t} \quad \text{malas condiciones}$$

$$\text{según eje z-z} \quad J_z = 15.030 \text{ cm}^4 \quad r_z = 15 \text{ cm} \quad r_{ib} = 1,87 \text{ cm}$$

$$\lambda_z = 700 / 15 = 46,666 \quad \alpha = h_c / 2 r_{ib} = 30 / (2 \times 1,87) = 8,02$$

$$\lambda_{mz} = \sqrt{(46,666)^2 + [0,82 \times 8,02^2 / (1 + 8,02^2)] (34,64 / 1,87)^2} = 49,54$$

$$\lambda_{cmz} = (49,54 / \pi) \sqrt{2,55 / 2.100} = 0,5495 = 0,55 \text{ ----- } \chi = 0,7489$$

$$P_{crz} = 0,7489 \times 2,55 \times 2 \times 33,4 = 127,57 \text{ t} < 134,4 \text{ t} \text{ ----- malas condiciones}$$

se sigue analizando el problema, aunque ya está en malas condiciones, esta barra daría en buenas condiciones si la carga de trabajo fuese $P = 91,0 \text{ t}$, entonces $91 \times 1,4 = 127,4 \text{ t} < 127,57 \text{ t}$.

$$\text{Pandeo local } \lambda_1 = 34,64 / 1,87 = 18,54 \text{ ----- } \lambda_{cl} = 0,205 \text{ ----- } \chi_1 = 0,8351$$

$P_{cr \text{ local}} = 0,8351 \times 2,55 \times 33,4 = 71,12 \text{ t}$ lo que no se tiene acá es la carga que realmente viene por el parante mas comprimido, si es mayor o menor que $71,12 \text{ t}$, al ser $\alpha = 60^\circ$, está garantizado el pandeo local, pero no en este caso, ya que la carga crítica es menor que la sollicitación.

$$\lambda_1 = 18,54 \leq \frac{3}{4} \lambda_m = \frac{3}{4} 49,54 = 37,155$$

Verificación de pandeo por torsión. En secciones de doble simetría, debe comprobarse pandeo por torsión. En estos perfiles **PN 200**, separados de 30 cm y unidos con diagonales de perfiles angulares, se ha determinado en las primeras páginas de esta publicación, ecuación (61), los valores del módulo de alabeo C_w , y del módulo de rigidez torsional J_t con ecuación (34), y su cálculo en página 11

$$h = 30 \text{ cm} \quad h_w = 18,87 \text{ cm}$$

$$J_x = 2.140 \times 2 = 4.280 \text{ cm}^4$$

$$J_{y1} = 117 \text{ cm}^4 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2$$

$$J_t = 6.582 \text{ cm}^4$$

$$C_w = 2 \left[\frac{h^2}{4} J_{x1} + \frac{h_w^2}{4} J_{y1} \right] = \frac{h^2}{4} J_x + \frac{h_w^2}{4} 2 J_{y1} \quad (61)$$

reemplazando valores queda:

$$C_w = 985.097 \text{ cm}^6$$

la tensión crítica ideal de Euler, para esta sección armada es: (ver publicación del autor "Pandeo por torsión y flexotorsión; de 2.005 ecuación 25 pág. 62, pág.50, 51 y 52 de pág.65)

$$F_e = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{L^2} + G J_t \right] = \frac{1}{19.310} \left[\frac{\pi^2 2.100 \times 985.097}{(700)^2} + 807,7 \times 6.582 \right] = 277,47$$

$$\lambda_{ct} = \sqrt{F_y / F_e} = \sqrt{2,55 / 277,47} = 0,095865 \text{ ----- } \chi = 0,8468$$

$$P_{cr} = 0,8468 \times 2,55 \times 33,4 \times 2 = 144,23 \text{ t} > 127,57 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

con estos resultados, predomina la carga crítica según eje inmaterial.

Se podría haber seguido otro camino, calculando el radio de giro de torsión:

$$r_t = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 J_t (KL)^2}{J_p}} = \sqrt{\frac{985.097 + 0,039 \times 6.582 \times (700)^2}{19.310}} = 80,70$$

$$\lambda = 700 / 80,70 = 8,673 \longrightarrow \lambda_{cE} = (8,673 / \pi) (\sqrt{2,55 / 2.100}) = 0,09620$$

llegándose a un resultado similar al anterior.

En estos perfiles, no debe verificarse pandeo por flexotorsión, si se comprueba que: ["Pandeo por torsión y flexotorsión" del autor año 2.005, página 17, ecuación 63, que brinda las ecuaciones que se necesitan].

$$\lambda_{vi} = \lambda_z i_p / c < \lambda_z \quad . . \quad 49,54 \times 23 / 91,48 = 12,5 < 49,54 \quad (\text{no existe predominio de pandeo por torsión}).$$

$$i_p = i_y + i_z = 8,0 + 15 = 23$$

$$c = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 L^2 J_t}{J_z}} = \sqrt{\frac{985.097 + 0,039 \times (700)^2 \times 6.582}{15.030}} = 91,48$$

En la mayoría de los casos de perfiles laminados europeos, la carga crítica de pandeo por torsión, es mayor que la de flexión.

Queda todavía por verificar pandeo local a torsión, de la barra de 34,64 cm del perfil **I 200**:

$$r_t = \sqrt{C_w + 0,039 J_t (KL)^2} / J_p = \sqrt{10.500 + 0,039 \times 13,5 \times (34,64)^2} / 2.257 = 2,22$$

$$\lambda = 34,64 / 2,22 = 15,6036 \quad \lambda_c = (15,036 / \pi) \cdot \sqrt{2,55 / 2.100} = 0,173 \longrightarrow \chi = 0,8394$$

$$P_{cr,t} = 0,8394 \times 2,55 \times 33,4 = 71,49 \text{ t} > 71,12 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

Predominan las cargas de pandeo por flexión, ante las cargas de pandeo por torsión.

Verificación de la diagonal, a pandeo por flexión.

$$Q_{\max} = 0,02 P_{cr} = 0,02 \times 127,57 \text{ t} = 2,55 \text{ t}$$

$$D_d = Q_{\max} / (2 \text{ sen } 60^\circ) = 2,55 / (2 \times 0,866) = 1,472 \text{ t}$$

$$\text{Datos del angular } 30 \times 3 \text{ mm: } A_d = 1,74 \text{ cm}^2 \quad r_{\min} = 0,57 \text{ cm}$$

$$\text{Diagonal } \lambda_d = 34,64 / 0,57 = 60,77 \longrightarrow \lambda_{cd} = 0,674 \longrightarrow \chi_d = 0,7024$$

$$D_{kd} = 0,7024 \times 2,55 \times 1,74 = 3,12 \text{ t} > 1,472 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

De página 87, primera parte (perfil angular):

$$b/t < \lambda_r = 0,45 \sqrt{E / \sigma_F} \quad b/t = 3 / 0,3 = 10 \quad \lambda_r = 0,45 \sqrt{2100 / 2,55} = 12,91$$

Verificación del pandeo por flexotorsión de la diagonal, y otras cargas que inciden sobre ella.

Por ser un angular, y no hay coincidencia entre el centro de gravedad y el centro de torsión, existe pandeo por flexotorsión, según los ejes y-y y z-z (ver figura) además de pandeo por flexión según el eje mínimo de inercia que fue calculado anteriormente (ver pandeo por flexotorsión del autor, 2.005, y las ecuaciones de página 79), debiéndose comprobar si la carga crítica de flexotorsión no es menor que la de flexión

$$\lambda_d = 34,64 / 0,90 = 38,49 \quad r_o = \sqrt{(0,90^2 + 0,69^2) \cdot 2} = 1,60 \text{ cm} \quad C_w = 0,03472 \text{ cm}^6$$

$$H = 1 - (0,69^2 \times 2) / 1,60^2 = 0,628 \quad F_{ey} = F_{ez} = \pi^2 \cdot 2.100 / 38,49^2 = 13,991 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{et} = \{(\pi^2 \times 2.100 \times 0,03472) / (34,64)^2 + 807,7 \times 0,0513\} / 1,74 \times 1,6^2 = 9,4366761 \text{ t/cm}^2$$

Con estos valores se plantea la ecuación de tercer grado (56) de página 79, de la publicación "Pandeo por flexotorsión" del autor

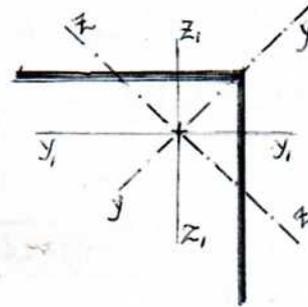
$$0,628 (F_e)^3 - 32,214679 (F_e)^2 + 459,80515 F_e - 1847,211 = 0$$

resolviéndola, se obtienen las tres raíces de la ecuación:

$$F_{e1} = 30,38896265286444 \text{ t/cm}^2 \quad F_{e2} = 6,91905753761204 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{e3} = 13,98923936366365 \text{ t/cm}^2 \quad \lambda_c = \sqrt{2,55 / 6,9190} = 0,6071$$

$$\chi = 0,7285 \quad D_{cd} = 0,7285 \times 2,55 \times 1,74 = 3,23 \text{ t} > 3,12 \text{ t (pandeo simple)}$$



Puede observarse en este caso, que por ser los valores de C_w , y J_t pequeños ($0,03472 \text{ cm}^6$ y $0,0513 \text{ cm}^4$), predomina la carga de pandeo por flexión, al ser pequeño C_w , la sección es muy deformable y las tensiones de flexión que se generan debido a la torsión, son también pequeñas.

Si no existiese otra sollicitación de carga, todo este cálculo es correcto, pero no olvidar la carga del operario, que usará las diagonales de la columna como peldaños de escalera, se estima la carga del operario con caja de herramientas, entre 100 Kg y 120 Kg, y por lo tanto esta carga provocará flexión en la diagonal, pandeo lateral flexotorsional, como también pandeos locales, que habrá que verificarlos en su conjunto, y es muy posible que el angular deba ser mayor que 30 x 3.

Se debe considerar también la circulación de vehículos, en las naves, que puedan rozar o chocar columnas, aunque su velocidad es pequeña, provocan daños en parantes, diagonales y bases.

E u r o p e o

Con los mismos datos anteriores, se verifica la barra con la reglamentación europea:

$$\text{alas } c/tr < 10 \epsilon = 10 \sqrt{2,4 / 2,55} = 9,7 \quad c/tr = 4,5 / 1,13 = 3,98 \quad (\text{pág. 107})$$

$$\text{alma } d/tw < 33 \epsilon = 33 \sqrt{2,4 / 2,55} = 32 \quad d/tw = 17 / 0,75 = 22,66 \quad (\text{pág. 105})$$

con estos resultados no existirá pandeo local antes de la carga crítica. Entonces según eje y-y:

$$\lambda_c = 0,485 \longrightarrow \chi = 0,9282 \longrightarrow N_{ky} = 0,9282 \times 2,55 \times 2 \times 33,4 / 1,1 = 143,74 \text{ t}$$

$$1,35 D + 1,5 L = 1,35 \times 0,5 + 1,5 \times 0,5 = 1,425 \longrightarrow N = 96 \times 1,425 = 136,8 t$$

$$143,74 t > 136,8 t \quad \text{buenas condiciones.}$$

según eje z-z

Se determinará primeramente la carga crítica como columna total:

$$\lambda_l = \pi \sqrt{\frac{A}{z Ad} \frac{d^3}{h_o (a/2)}} = \pi \sqrt{\frac{2 \times 33,4}{2 \times 1,74} \cdot \frac{(34,64)^3}{30^2 \times 17,32}} = 22,48$$

$$\lambda_{zi} = \sqrt{\lambda_y^2 + \lambda_l^2} = \sqrt{(46,666)^2 + (22,48)^2} = 51,78 \quad \text{para } E_t/E = 1,00$$

buscando la verdadera relación y tomando $\sigma_k = 2,461 t/cm^2$

$$\frac{1}{\lambda_k} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_k}{E} \left[\frac{0,2 \sigma_F}{\sqrt{(0,2 \sigma_F)^2 - (\sigma_k - 0,8 \sigma_F)^2}} \right]} \longrightarrow \lambda_k = 52$$

$$\frac{E_t}{E} = \left[1 - \frac{(\sigma_k - \sigma_p)^2}{(\sigma_F - \sigma_p)^2} \right] = \left[1 - \frac{(2,461 - 2,04)^2}{(2,550 - 2,04)^2} \right] = 0,3185659 = 0,32$$

$$\lambda_{zi} = \sqrt{(46,666)^2 + 0,32 (22,48)^2} = 48,37 \longrightarrow \lambda_{cz} = 0,537 \longrightarrow \chi = 0,8946$$

$$\text{ahora para un valor de } \sigma_k = 2,472 \text{ ----- } E_t/E = 0,282 \text{ ----- } \lambda_{zi} = 48,16 \text{ ----- } \lambda_{cz} = 0,534$$

y ya no es mucho lo que se gana, por eso se prosigue el cálculo con $\lambda_{cz} = 0,534$

$$N_{kz} = 0,8959 \times 2,55 \times 2 \times 33,4 / 1,1 = 138,73 t > 136,8 t \quad \text{buenas condiciones.}$$

Se calcula ahora la carga crítica según la reglamentación europea, para comparar con la anterior.

$$1/S_v = 2 d^3 / (n a h_o E Ad) = (34,64)^3 / (34,64 \times 30^2 \times 2100 \times 1,74) = 0,0003649 \cdot \frac{1}{t}$$

$$N_{ki} = \pi E J_z / \ell_k^2 = \pi \times 2.100 \times 15.030 / 700^2 = 635,74 t$$

$$\bar{N}_{ki} = N_{ki} / [1 + (N_{ki}/S_v)] = 635,74 / [1 + (635,74 \times 0,0003649)] = 516,03 t$$

$$W_o = 700 / 500 = 1,40 \text{ cm} \quad W_{\text{máx}} = 1,40 / [1 - (138 / 516,03)] = 1,911 \text{ cm}$$

$$M_{\text{máx}}^{\text{II}} = 138 \times 1,911 = 263,73 \text{ tcm} \quad N_G = 138 / 2 + 263,73 / 30 = 77,79 t$$

$$\text{esbeltez local } \lambda_{l \text{ local}} = 34,64 / 1,87 = 18,524 \longrightarrow \lambda_c = 0,20 \longrightarrow \chi = 1,0$$

$$N_k = 1,0 \times 2,55 \times 33,4 / 1,1 = 77,43 \text{ t} = 77,79 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones}$$

comparando los N_{kz} : 138 t y 138,73 t. puede verse que prevalece ligeramente la carga crítica de pandeo de barra local, de lo que se desprende que con $\alpha > 60^\circ$, se garantiza el pandeo como columna total.

$$Q_{\text{máx}} = \pi M_{\text{máx}}^{\text{II}} / \ell = \pi \times 263,73 / 700 = 1,184 \text{ t}$$

$$D_d = Q_{\text{máx}} / (2 \sin 60^\circ) = 1,184 / (2 \times 0,866) = 0,684 \text{ t}$$

$$\lambda_d = 34,64 / 0,57 = 60,77 \longrightarrow \lambda_{cd} = 0,674 \longrightarrow \chi = 0,73455 \text{ (curva c)}$$

$$D_{kd} = 0,73455 \times 2,55 \times 1,74 / 1,1 = 2,962 \text{ t} > 0,684 \text{ t}$$

según reglamento pág. 171 ecuación (349): $\lambda_{cd} = 0,35 + 0,7 \times 0,674 = 0,82 \longrightarrow \chi = 0,6416$

$$D_{kd} = 0,6416 \times 2,55 \times 1,74 / 1,1 = 2,588 \text{ t} > 0,684 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

Puede observarse que de acuerdo a la reglamentación americana, respecto de ambos ejes la barra no está en buenas condiciones (no tiene el coeficiente de seguridad requerido: 1,40 para las 96t, el existente es tan solo de 1,33 pues $96 \times 1,33 = 127,68 \text{ t} = 127,57 \text{ t}$) pero de acuerdo a la europea sí está en buenas condiciones. Existen además diferencias en las cargas críticas en ambos ejes:

$$P_{cr y} = 131,212 \text{ t (americano)} \quad N_{ky} = 143,74 \text{ t (europeo)}$$

Se observa una diferencia aproximada del 9,0% entre ambas cargas críticas.

$$P_{cr z} = 127,57 \text{ t (americano)} \quad N_{kz} = 138,00 \text{ t (europeo)}$$

Se observa una diferencia aproximada del 7,7% entre ambas cargas críticas. Observándose que los estudios europeos admiten mayores cargas, y así lo demuestran los ensayos realizados.

Con respecto a los esfuerzos cortantes se tiene:

$$Q_{\text{máx}} = 2,55 \text{ t (americano)} \quad Q_{\text{máx}} = 1,184 \text{ t (europeo)}$$

Y aquí sí, como se observa la diferencia es abismal, con la salvedad que los europeos este problema lo tienen bien estudiado y ensayado en sus laboratorios, y por lo tanto sus resultados son acordes con la realidad.

Si se hubiese simplificado la ecuación que brinda λ_m (americana) se tendría:

$$\lambda_{mz} = \sqrt{\lambda_z^2 + \lambda_l^2} = \sqrt{46,666^2 + (34,64 / 1,87)^2} = 50,2 \quad \text{difiere muy poco de } \lambda_{mz} = 49,54$$

La solución del problema según norma americana, sería incrementar la sección tomando IPN 220 con una separación de 25 cm, con una diferencia de 10 kg / m en mas en este último caso.

Verificación de pandeo por torsión.

Con los datos anteriores, se puede calcular la carga crítica:

$$F_e = 277,47 \text{ t cm}^{-2} \longrightarrow \lambda_c = 0,095865 \longrightarrow \chi = 1,00 \text{ (curva c)}$$

$$P_k = \chi F_y A / 1,1 = 1,00 \times 2,55 \times 33,4 \times 2 / 1,1 = 154,85 \text{ t} > 138 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

Existe predominio de pandeo por flexión..

Verificación del pandeo por flexotorsión de la diagonal, y posibles cargas que inciden

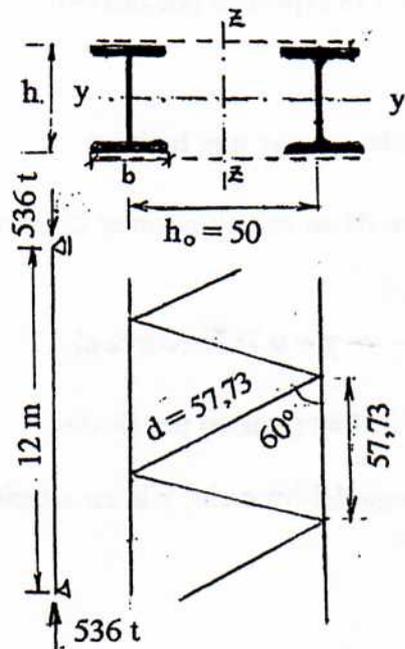
El planteo del problema es igual al anterior, ecuación cubica, de su solución tomar la menor de las raíces:

$$F_e = 6,919 \longrightarrow \lambda_c = \sqrt{2,55 / 6,919} = 0,6071 \longrightarrow \chi = 0,7060 \text{ (curva c)}$$

$$D_{kd} = \chi F_y A / 1,1 = 0,7060 \times 2,55 \times 1,740 = 3,133 \text{ t} > 2,588 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

Lo mismo que en el caso anterior, se deben considerar la carga del operario, y la circulación de vehículos a muy baja velocidad, posibles rozamientos y choques.

Ejercicio 3 - Diseñar una columna con perfiles IPB, unidas con diagonales de ángulos iguales, para una carga de 536 t, simplemente apoyada, y una luz de 12 m, la carga está compuesta por el 30% de carga muerta y el 70% de carga viva, y según el eje material está arriostrada en la mitad de la luz. Se adoptan dos perfiles IPB 400, separados de 50 cm, los datos son los siguientes:



D A T O S: perfil doble te **IPB 400 mm**

$$A = 198 \times 2 = 396 \text{ cm}^2 \quad A_1 = 198 \text{ cm}^2 \quad i_y = 17,1 \text{ cm}$$

$$i_z = 7,40 \text{ cm} \quad \sigma_F = 2,50 \text{ t/cm}^2 \quad b = 30 \text{ cm}$$

$$t_w = 1,35 \text{ cm} \quad t = 2,40 \text{ cm} \quad J_z = 10.820 \times 2 = 21.640 \text{ cm}^4$$

$$E = 2.100 \text{ t/cm}^2 \quad G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad J_y = 57.680 \times 2 = 115.360 \text{ cm}^4$$

A m e r i c a n o

$$b/2t < \lambda_r \quad (\text{alas})$$

$$30 / (2 \times 2,4) = 6,25 < 0,56 \sqrt{(2.100 / 2,5)} = 16,23$$

$$\text{alma } h_c / t_w = 29,8 / 1,35 = 22,07 < \lambda_r = 1,49 \sqrt{2.100 / 2,5} = 43,18$$

con estos resultados no existirá pandeo local antes de la carga crítica.

$$1,2 D + 1,6 L = 1,2 \times 0,3 + 1,6 \times 0,7 = 1,48 \longrightarrow P = 536 \times 1,48 = 793,28 \text{ t}$$

con respecto al eje material y-y:

$$\lambda_y = 600 / 17,1 = 35,08 \longrightarrow \lambda_{cy} = 0,385 \longrightarrow \chi = 0,79886$$

$$P_{cr} = 0,79886 \times 2,5 \times 2 \times 198 = 790,87 \text{ t} < 793,28 \text{ t} \quad \text{malas condiciones.}$$

con respecto al eje inmaterial z-z: (ángulo de las diagonales $\alpha = 60^\circ$)

$$J_z = 247.500 \text{ cm}^4 \quad r_z = 25 \text{ cm} \quad r_{ib} = 7,40 \text{ cm} \quad \lambda_z = 1.200 / 25 = 48$$

$$\alpha = 50 / 2 \times 7,40 = 3,378 \quad \lambda_1 = 57,735 / 7,40 = 7,80$$

$$\lambda_{mz} = \sqrt{48^2 + [0,82 \times 3,378^2 / (1 + 3,378^2)] (7,80)^2} = 48,47 \longrightarrow \lambda_{cmz} = 0,53$$

$$\chi = 0,75572 \longrightarrow P_{cr} = 0,75572 \times 2,5 \times 2 \times 198 = 748,16 \text{ t} < 793,28 \text{ t} \quad \text{malas condiciones}$$

si se hubiese usado la esbeltez simplificada sería: $\lambda_m = \sqrt{48^2 + 7,80^2} = 48,63$ error mínimo.

Se sigue analizando el problema aunque ya está en malas condiciones, ¿cuál sería el valor del verdadero coeficiente de seguridad?, el valor sería de 1,3958, pues $536 \text{ t} \times 1,3958 = 748,15 \text{ t}$, pero éste es insuficiente porque $1,3958 < 1,48$ **malas condiciones**. Para que la barra esté en buenas condiciones la carga de servicio debe ser $P = 505,5 \text{ t}$, pues $505,5 \times 1,48 = 748,14 \text{ t}$.

$$\text{Pandeo local } \lambda_l = 57,735 / 7,40 = 7,8 \longrightarrow \lambda_{cl} = 0,085 \longrightarrow \chi = 0,84743$$

$$P_{cr} = 0,84743 \times 2,5 \times 198 = 419,78 \text{ t}$$

y esto tampoco está garantizado, ya que la barra está solicitada por una carga factoreada $P = 793,18 \text{ t}$, que suponiendo que trae la mitad sería $P_l = 793,18 / 2 = 396,19 \text{ t}$, y lo que suma la flexión es en promedio 8% sería $396,19 \times 1,08 = 427,89 \text{ t} > 419,78 \text{ t}$ **malas condiciones**.

$$Q_{\max} = 0,02 P_{cr} = 0,02 \times 748,16 = 14,96 \text{ t} \text{ y debería ser si todo estuviese bien}$$

$$Q_{\max} = 0,02 \times 793,28 \text{ t} = 15,86 \text{ t}$$

pero el corte siempre está en relación con la carga crítica de la barra.

$$D = 14,96 / 2 \times 0,866 = 8,637 \text{ t} \text{ eligiendo angulares de alas iguales } 55 \times 5 \text{ mm}$$

$$A_l = 5,32 \text{ cm}^2 \quad i_{\min} = 1,07 \text{ cm} \quad \lambda_{\min} = 57,73 / 1,07 = 53,95 \longrightarrow \lambda_{c \min} = 0,592$$

$$\chi = 0,73476 \longrightarrow D_{kd} = 0,73476 \times 2,5 \times 5,32 = 9,77 \text{ t} > 8,637 \text{ t}$$

Verificación de pandeo por torsión. En secciones de doble simetría, debe comprobarse pandeo por torsión. En estos perfiles **IPB 400**, separados de 50 cm y unidos con diagonales de perfiles angulares, se ha determinado con ecuación (61), los valores del módulo de alabeo C_w , y del módulo de rigidez torsional J_t con ecuación (34), y su cálculo en página 11

$$h = 50 \text{ cm} \quad h_w = 37,60 \text{ cm} \quad J_y = 57.680 \times 2 = 115.360 \text{ cm}^4 \quad J_{z1} = 10.820 \text{ cm}^4$$

$$G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad J_t = 118.340 \text{ cm}^4 \quad J_z = 247.500 \text{ cm}^4 \quad C_w = 79.748.442 \text{ cm}^6$$

la tensión crítica ideal de Euler, para esta sección armada es: (ver publicación del autor "Pandeo por torsión y flexotorsión; de 2.005 ecuación 25 pág. 62, pág.50, 51 y 52 de pág.65)

$$F_{et} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{L^2} + G J_t \right] = \frac{1}{362.860} \left[\frac{\pi^2 \cdot 2.100 \times 79.748.442}{(1.200)^2} + 807,7 \times 118.340 \right] = 266,58$$

$$\lambda_z = \sqrt{F_y / F_e} = \sqrt{2,50 / 266,58} = 0,09684 \longrightarrow \chi = 0,8467$$

$$P_{cr,t} = 0,8467 \times 2,50 \times 198 \times 2 = 838,233 \text{ t} > 748,16 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

con estos resultados, predomina la carga crítica de flexión según eje inmaterial.

Se podría haber seguido otro camino, calculando el radio de giro de torsión:

$$c = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 J_t (KL)^2}{J_p}} = \sqrt{\frac{79.748.442 + 0,039 \times 118.340 \times (1.200)^2}{362.860}} = 136,14$$

$$\lambda = 1.200 / 136,14 = 8,814 \longrightarrow \lambda_c = (8,814 / \pi) (\sqrt{2,50 / 2.100}) = 0,09680$$

llegándose a un resultado similar al anterior.

En estos perfiles, no debe verificarse pandeo por flexotorsión, si se realiza la comprobación ["Pandeo por torsión" del autor 2.005, página 67 ecuación (63)] que brinda:

$$\lambda_{vi} = \lambda_z i_p / c < \lambda_z \quad \therefore \quad 48,47 \times 42,1 / 164,847 = 12,37 < 48,47 \quad (\text{no existe}$$

predominio de pandeo por torsión).

$$i_p = i_y + i_z = 17,1 + 25 = 42,1$$

$$c = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 L^2 J_t}{J_z}} = \sqrt{\frac{79.748.442 + 0,039 \times (1.200)^2 \times 118.340}{247.500}} = 164,847$$

En la mayoría de los casos de perfiles laminados europeos, la carga crítica de pandeo por torsión, es mayor que la de flexión.

Queda todavía por verificar pandeo local a torsión, de la barra de 57,73 cm del perfil I 400, que $h / b < 1$ no debe verificarse: $40 / 30 = 1,33$.

$$r_t = \sqrt{C_w + 0,039 J_t (KL)^2 / J_p} = \sqrt{3.824.221 + 0,039 \times 357, \times (57,73)^2 / 68.500} = 7,517$$

$$\lambda = 57,73 / 7,517 = 7,68 \quad \lambda_c = (7,68 / \pi) \cdot \sqrt{2,50 / 2.100} = 0,084347 \longrightarrow \chi = 0,8474$$

$$P_{cr,t} = 0,8474 \times 2,50 \times 198 = 419,463 \text{ t} < 419,78 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

Predomina la carga de pandeo por torsión, ante las cargas de pandeo por flexión.

Verificación de pandeo por flexotorsión de la diagonal, y otras cargas que inciden sobre ella.

Por ser un angular, y no hay coincidencia entre el centro de gravedad y el centro de torsión, existe pandeo por flexotorsión, según los ejes $y_i - y_i$ y $z_i - z_i$ (ver figura) además de pandeo por flexión según el eje mínimo de inercia que fue calculado anteriormente (ver pandeo por flexotorsión del autor, 2.005, y las ecuaciones de página 79), debiéndose comprobar si la carga crítica de flexotorsión no es menor que la de flexión

$$\lambda_d = 57,73 / 1,66 = 34,78 \quad r_o = \sqrt{(1,66^2 + 1,27^2) \cdot 2} = 2,956 \text{ cm} \quad C_w = 1,00 \text{ cm}^6$$

$$H = 1 - (1,27^2 \times 2) / 2,956^2 = 0,63 \quad F_{ey} = F_{ez} = \pi^2 \cdot 2.100 / 34,78^2 = 17,134 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{et} = \{(\pi^2 \times 2.100 \times 1,00) / (57,73)^2 + 807,7 \times 0,4375\} / (5,32 \times 2,956^2) = 7,73543 \text{ t/cm}^2$$

Con estos valores se plantea la ecuación de tercer grado (56) de página 79, de la publicación "Pandeo por flexotorsión" del autor

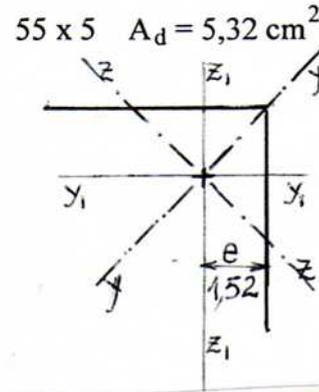
$$0,63 (F_e)^3 - 35,67804 (F_e)^2 + 558,6516 F_e - 2270,9221 = 0$$

resolviéndola, se obtienen las tres raíces de la ecuación:

$$F_{e1} = 33,18162593 \text{ t/cm}^2 \quad F_{e2} = 6,35440143268076 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{e3} = 17,0957821538 \text{ t/cm}^2 \quad \lambda_c = \sqrt{2,50 / 6,354401} = 0,62724$$

$$\chi = 0,7209 \quad D_{cd} = 0,7209 \times 2,50 \times 5,32 = 9,58797 \text{ t} > 8,64 \text{ t (solicitud)} \quad 9,77 \text{ t (crítica por flexión)}$$



Puede observarse en este caso, que predomina pandeo por flexotorsión, frente al pandeo por flexión, la diagonal está solicitada por 8,64 t y lo que resiste por flexotorsión es 9,588 t, diferencia en menos del 1,90 %, que es inadmisibles, y la diagonal deberá tener sección, por ejemplo sería de 55 x 6 mm.

Si no existiese otra sollicitación de carga, todo este cálculo es correcto, pero no olvidar la carga del operario, que usará las diagonales de la columna como peldaños de escalera, se estima la carga del operario con caja de herramientas, entre 100 Kg y 120 Kg, y por lo tanto esta carga provocará flexión en la diagonal, pandeo lateral flexotorsional, como también pandeos locales, que habrá que verificarlos en su conjunto, y es muy posible que el angular deba ser mayor que 30 x 3.

Cálculo de pandeo por flexión con parantes de IPB 450.

La columna está en malas condiciones, y no es cuestión de la diagonal. Si se separan más los perfiles las diagonales serán más largas, y esta no será la solución, pues la separación tendría que ser bastante grande. Se incrementa la sección del perfil tomando IPB 450, separados de 45 cm, y los datos son:

$$A = 218 \text{ cm}^2 \quad J_y = 79890 \times 2 = 159.780 \text{ cm}^4 \quad r_y = 19,1 \text{ cm} \quad r_{ib} = 7,33 \text{ cm}$$

$$t = 2,6 \text{ cm} \quad t_w = 1,40 \text{ cm} \quad b = 30 \text{ cm} \quad \sigma_F = 2,5 \text{ t/cm}^2 \quad J_{z1} = 11.720 \text{ cm}^4$$

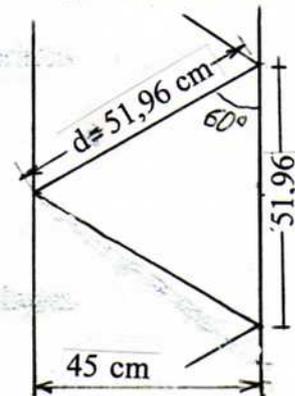
si se verifica el perfil, se constata que no existe pandeo local antes de la carga crítica de pandeo.

Según eje y-y:

$$\lambda_y = 600 / 19,1 = 31,41 \quad \lambda_{cy} = 0,345 \quad \chi = 0,8087$$

$$P_{cr} = 0,8087 \times 2,5 \times 2 \times 218 = 881,48 \text{ t} > 793,18 \text{ t} \quad \text{buenas cond.}$$

$$\text{Según eje z-z:} \quad i_{z1} = 7,33 \text{ cm}$$



$$J_z = 220.725 \text{ cm}^4 \quad i_z = 22,5 \text{ cm} \quad \lambda_z = 1200 / 22,5 = 53,33 \quad \alpha = 45 / (2 \times 7,33) = 3,07$$

$$\lambda_{mz} = \sqrt{(53,333)^2 + [0,82 \times 3,07^2 / (1 + 3,07^2)] (51,96 / 7,33)^2} = 53,68$$

$$\lambda_{c,mz} = 0,589 \longrightarrow \chi = 0,73476 \quad P_{cr} = 0,73476 \times 2,5 \times 2 \times 218 = 800,89 \text{ t} > 793,18 \text{ t}$$

y ahora sí da en **buenas condiciones.**

$$\text{Pandeo local } \lambda_{l \text{ local}} = 51,96 / 7,33 = 7,09 \text{ ----- } \lambda_{c \text{ l-local}} = 0,0778 \text{ ----- } \chi = 0,84773$$

$$P_{cr \text{ local}} = 0,84773 \times 2,5 \times 218 = 462,01 \text{ t}$$

Suponiendo que cada parante tiene la mitad de la carga crítica: 400,445 t, la influencia de la flexión en promedio 8%, la total sería 432,48 t < 462,01 t, y puede verse que el pandeo local está garantizado con $\alpha = 60^\circ$.

$$Q_{\text{máx}} = 0,02 \times 800,89 = 16,02 \text{ t}$$

$$D_{\text{máx}} = 16,02 / (2 \times 0,866) = 9,25 \text{ t}$$

$$\text{Angular } 55 \times 5 \quad \lambda_d = 51,96 / 1,07 = 48,56 \text{ ----- } \lambda_{c,d} = 0,533 \text{ ----- } \chi = 0,7557$$

$$D_k = 0,7557 \times 2,5 \times 5,32 = 10,05 \text{ t} > 9,25 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

Si se tiene en cuenta el momento de inercia propio de cada perfil J_{z1} , se incrementa la inercia de J_z , obteniéndose:

$$J_z = 220.725 + 11.720 \times 2 = 244.165 \text{ cm}^4 \quad i_z = 23,66 \text{ cm} \quad \lambda_z = 1.200 / 23,66 = 50,70$$

$$\lambda_{mz} = 51,06 \text{ ----- } \lambda_{c,mz} = 0,56077 \text{ ----- } \chi = 0,74544$$

$$P_{cr,z} = 0,74544 \times 2,50 \times 218 \times 2 = 812,5296 \text{ t} > 793,28 \text{ t} \text{ diferencia con la anterior de } 1,43 \%$$

No es mucho lo que se ha ganado, y con el cálculo anterior la carga crítica es menor (se está del lado de la seguridad, habría un pequeño sobredimensionamiento).

$$Q_{\text{máx}} = 0,02 \times 812,5296 = 16,25 \text{ t} \text{ diferencia con el anterior de } 1,4 \%$$

$$D_{\text{máx}} = 16,25 / (2 \times 0,866) = 9,382 \text{ t}$$

$$\text{Angular de } 55 \times 6 \text{ mm} \quad \lambda_d = 51,96 / 1,07 = 48,56 \text{ ----- } \lambda_{c,d} = 0,533 \text{ ----- } \chi = 0,7557$$

$$D_{cr} = 0,7557 \times 2,5 \times 6,31 = 11,921 \text{ t} > 9,382 \text{ t}$$

Verificación de pandeo por torsión, barra armada. En secciones de doble simetría, debe comprobarse pandeo por torsión. En estos perfiles **I P B 450**, separados de 45 cm y unidos con diagonales de perfiles angulares 55 x 6, se ha determinado con ecuación (61), los valores del módulo de alabeo C_w , y del módulo de rigidez torsional J_t con ecuación (34),

$$h = 45 \text{ cm} \quad h_w = 42,40 \text{ cm} \quad J_y = 79.890 \times 2 = 159.780 \text{ cm}^4 \quad J_{z1} = 11.720 \text{ cm}^4$$

$$G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad J_t = 129.439 \text{ cm}^4 \quad J_z = 244.165 \text{ cm}^4 \quad C_w = 91.423.499 \text{ cm}^6$$

la tensión crítica ideal de Euler, para esta sección armada es: (ver publicación del autor "Pandeo por torsión y flexotorsión; de 2.005 ecuación 25 pág. 62, pág.50, 51 y 52 de pág.65)

$$F_{et} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{L^2} + G J_t \right] = \frac{1}{403.945} \left[\frac{\pi^2 \cdot 2.100 \times 91.423.499}{(1.200)^2} + 807,7 \times 129.439 \right] = 262,075 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$$

$$\lambda_c = \sqrt{F_y / F_e} = \sqrt{2,50 / 262,075} = 0,09767 \longrightarrow \chi = 0,8466$$

$$P_{cr,t} = 0,8466 \times 2,50 \times 218 \times 2 = 922,794 \text{ t} > 793,28 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

con estos resultados, predomina la carga crítica de flexión según eje inmaterial, pandeo por flexión 812,5296 t. y pandeo por torsión 922,794 t.

Se podría haber seguido otro camino, calculando el radio de giro de torsión:

$$r_t = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 J_t (KL)^2}{J_p}} = \sqrt{\frac{91.423.499 + 0,039 \times 129.439 \times (1.200)^2}{403.945}} = 134,99$$

$$\lambda = 1.200 / 134,99 = 8,88955 \longrightarrow \lambda_c = (8,88955 / \pi) (\sqrt{2,50 / 2.100}) = 0,09763$$

llegándose a un resultado similar al anterior.

En estos perfiles, no debe comprobarse pandeo por torsión, si, se se realiza la comprobación ["Pandeo por torsión" del autor 2.005, página 67 ecuación (63)] que brinda:

$$\lambda_{vi} = \lambda_z i_p / c < \lambda_z \quad \therefore 50,72 \times 42,76 / 173,627 = 12,49 < 50,72 \quad (\text{no existe}$$

predominio de pandeo por torsión).

$$i_p = i_y + i_z = 19,1 + 23,66 = 42,76$$

$$c = \sqrt{\frac{C_w + 0,039 L^2 J_t}{J_z}} = \sqrt{\frac{91.423.499 + 0,039 \times (1.200)^2 \times 129.439}{244.165}} = 173,627$$

En la mayoría de los casos de perfiles laminados europeos, la carga crítica de pandeo por torsión, es mayor que la de flexión.

Queda todavía por verificar pandeo local a torsión, de la barrita de 51,96 cm del perfil **I 450**,

$$r_t = \sqrt{C_w + 0,039 J_t (KL)^2} / J_p = \sqrt{5.267.437 + 0,039 \times 390,3 \times (51,96)^2} / 91.610 = 7,612$$

$$\lambda = 51,96 / 7,612 = 6,826 \quad \lambda_c = (6,826 / \pi) \sqrt{2,50 / 2.100} = 0,074968 \rightarrow \chi = 0,8480$$

$$P_{cr,t} = 0,8480 \times 2,50 \times 218 = 462,16 \text{ t} > 462,01 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

Predomina la carga de pandeo por flexión, ante las cargas de pandeo por torsión, podría decirse que ambas coinciden, es muy pequeña la diferencia.

Verificación de pandeo por flexotorsión de la diagonal, y otras cargas que inciden sobre ella.

Por ser un angular, y no hay coincidencia entre el centro de gravedad y el centro de torsión, existe pandeo por flexotorsión, según los ejes y-y y z-z (ver figura) además de pandeo por flexión según el eje mínimo de inercia que fue calculado anteriormente (ver pandeo por flexotorsión del autor, 2.005, y las ecuaciones de página 79), debiéndose comprobar si la carga crítica de flexotorsión no es menor que la de flexión (angular de 55 x 5 mm)

$$\lambda_d = 51,96 / 1,66 = 31,30 \quad r_o = \sqrt{(1,66^2 + 1,26^2) \cdot 2} = 2,947 \text{ cm} \quad C_w = 1,687 \text{ cm}^6$$

$$H = 1 - (1,26^2 \times 2) / 2,947^2 = 0,634 \quad F_{ey} = F_{ez} = \pi^2 \cdot 2.100 / 31,30^2 = 21,15594 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{et} = \{(\pi^2 \times 2.100 \times 1,687) / (51,96)^2 + 807,7 \times 0,7488\} / (6,31 \times 2,947^2) = 11,275 \text{ t/cm}^2$$

Con estos valores se plantea la ecuación de tercer grado (56) de página 79, de la publicación "Pandeo por flexotorsión" del autor

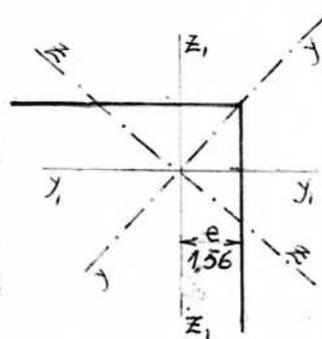
$$55 \times 5 \quad A_d = 5,31 \text{ cm}^2$$

$$0,634 (F_e)^3 - 45,852186 (F_e)^2 + 924,64 F_e - 5046,39 = 0$$

resolviéndola, se obtienen las tres raíces de la ecuación:

$$F_{e1} = 42,280895053694 \text{ t/cm}^2 \quad F_{e2} = 8,90809328666671 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{e3} = 21,13307159654 \text{ t/cm}^2 \quad \lambda_c = \sqrt{2,50 / 8,9081} = 0,5297 < 0,8$$



Al ser $\lambda_c < 0,8$, la longitud crítica de de la diagonal es (k.d), siendo $k = 1,00$, si fuese mayor $\lambda_c > 0,8$ será $k = 1,3$ (reglamentación norteamericana y proyecto de regl. Argentino).

$$\chi = 0,7558 \rightarrow D_{cr} = 0,7558 \times 2,5 \times 6,31 = 11,923 \text{ t} > 9,382 \text{ t buenas condiciones.}$$

Puede observarse en este caso, da en buenas condiciones, pero predomina la carga crítica de pandeo por flexotorsión (11,923 t), frente a la crítica de pandeo por flexión (11,921 t), la diagonal está solicitada por 9,382 t, si las cargas que solicitan a la barra armada aumentan, llegaría la diagonal al colapso por flexotorsión ó flexión

Si no existiese otra sollicitación de carga, todo este cálculo es correcto, pero no olvidar la carga del operario, que usará las diagonales de la columna como peldaños de escalera, se estima la carga del operario con caja de herramientas, entre 100 Kg y 120 Kg, y por lo tanto esta carga provocará flexión en la diagonal, pandeo lateral flexotorsional, como también pandeos locales, que habrá que verificarlos en su conjunto, y es muy posible que el angular deba ser mayor que 55 x 6 mm.

Se debe tener presente, que la diagonal fue considerada como simplemente apoyada, como lo pide el reglamento, pero en realidad si está sujeta como mínimo con dos bulones, se genera un empotramiento, que habrá que evaluarlo, como así también si la unión es por cordones de soldadura (capítulo B y E de la reglamentación norteamericana y el proyecto de la reglamentación argentina)

E u r o p e o

Con respecto a la reglamentación europea, se adoptan los perfiles primitivos **IPB 400**, separados de 50 cm, y con $\alpha = 45^\circ$, cuyos datos se dieron al principio.

alas $c/tr < 10 \epsilon = \sqrt{2,4/2,5} = 9,8$

$c/tr = 15/2,4 = 6,25 < 9,8$

alma $d/tw < 33 \epsilon = 33 \sqrt{2,4/2,5} = 32,33$

$d/tw = 29,8/1,35 = 22,07 < 32,33$

con estos resultados, no habrá pandeo local antes de la carga crítica.

$1,35 D + 1,5 L = 1,35 \times 0,3 + 1,5 \times 0,7 = 1,455$

$N = 536 \times 1,455 = 779,88 \text{ t}$

Con respecto al eje material y-y: $\lambda_y = 600/17,1 = 35,08$

$\lambda_{cy} = 0,385 \longrightarrow \chi = 0,9569$

$N_{ky} = 0,9569 \times 2,5 \times 2 \times 198 / 1,1 = 861,21 \text{ t} > 779,88 \text{ t}$

Con respecto al eje inmaterial z-z: $\lambda_z = 1200/25 = 48$

$J_z = 247.500 \text{ cm}^4 \quad i_z = 25 \text{ cm} \quad i_{zi} = 7,40 \text{ cm}$

Diagonales de angulares de alas iguales 50 x 5 mm, $i_{\min} = 0,98 \text{ cm}$,

Verificación como barra total: $\alpha = 45^\circ$, $A_l = 4,80 \text{ cm}^2$

$\lambda_l = \pi \sqrt{198 \times (70,7)^3 / (4,80 \times 50^2 \times 50)} = 33,92$

$\lambda_{zi} = \sqrt{48^2 + 33,92^2} = 58,77$

con $\sigma_k = 2,389 \longrightarrow E_l/E = 0,39472 = 0,395$ reemplazando en la ecuación de λ_{yi}

$\lambda_{zi} = \sqrt{48^2 + 0,395 \times (33,92)^2} = 52,52 \longrightarrow \lambda_{czi} = 0,576 \longrightarrow \chi = 0,8790$

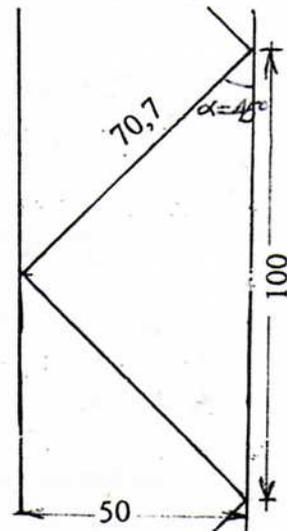
$N_{kz} = 0,8790 \times 2,5 \times 2 \times 198 / 1,1 = 791,1 \text{ t} > 779,88 \text{ t}$ **buenas condiciones.**

Según la norma europea es:

$1/S_v = (70,7)^3 / (100 \times 50^2 \times 2.100 \times 4,80) = 0,0001402 \cdot \frac{1}{t}$

$N_{ki} = \pi^2 \times 2.100 \times 247.500 / (1.200)^2 = 3.562,31 \text{ t}$

$\bar{N}_{ki} = N_{ki} / [1 + (N_{ki} / S_v)] = 2.375,77 \text{ t}$



$$W_o = 1.200 / 500 = 2,40 \text{ cm} \quad W_{\text{máx}} = 2,40 / [1 - (787 / 2.375,77)] = 3,589 \text{ cm}$$

$$M_{\text{máx}}^{\text{III}} = 787 \times 3,589 = 2.824,54 \text{ tcm} \quad N_G = 787 / 2 + 2.824,54 / 50 = 449,99 \text{ t}$$

$$\lambda_{l \text{ local}} = 100 / 7,40 = 13,51 \longrightarrow \lambda_{cl \text{ local}} = 0,148 \longrightarrow \chi = 1,0 \text{ (curva b)}$$

$$N_{k \text{ local}} = 1,0 \times 2,5 \times 198 / 1,1 = 450 \text{ t} = 449,99 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

787 t es la carga crítica de pandeo local, pero la sollicitación factoreada es de 779,88 t, por lo que se estará en muy buenas condiciones.

La carga crítica como columna total es de 791,1 t, y la de pandeo local es de 787 t, con lo que queda demostrado que la de pandeo local es menor que la de pandeo total en este intervalo de esbeltez.

$$Q_{\text{máx}} = \pi M_{\text{máx}} / \ell = \pi \times 2.824,54 / 1.200 = 7,395 \text{ t}$$

$$D_d = Q_{\text{máx}} / 2 \text{ sen} \alpha = 7,395 / 2 \times 0,707 = 5,23 \text{ t}$$

$$\lambda_d = 70,7 / 0,98 = 72,14 \longrightarrow \lambda_{cd} = 0,792 \longrightarrow \chi = 0,6608 \text{ (curva c)}$$

$$D_{kd} = 0,6608 \times 2,5 \times 4,80 / 1,1 = 7,21 \text{ t} > 5,23 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

Según reglamentación europea pág. 171, ecuación (349):

$$\lambda_{cd} = 0,35 + 0,7 \times 0,792 = 0,9044 \longrightarrow \chi = 0,5901$$

$$D_{kd} = 0,5901 \times 2,5 \times 4,80 / 1,1 = 6,44 > 5,23 \text{ t} \quad \text{buenas condiciones.}$$

Verificación de pandeo por torsión, barra armada. En secciones de doble simetría, debe comprobarse pandeo por torsión. En estos perfiles **IPB 400**, separados de 50 cm y unidos con diagonales de perfiles angulares 50 x 5, se ha determinado con ecuación (61), los valores del módulo de alabeo C_w , y del módulo de rigidez torsional J_t con ecuación (34),

$$h = 50 \text{ cm} \quad h_w = 37,60 \text{ cm} \quad J_y = 57.680 \times 2 = 115.360 \text{ cm}^4 \quad J_{z1} = 10.820 \text{ cm}^4$$

$$G = 807,7 \text{ t/cm}^2 \quad J_t = 118.340 \text{ cm}^4 \quad J_z = 247.500 + 10.820 \times 2 = 269.140 \text{ cm}^4$$

$$C_w = 79.748.442 \text{ cm}^6$$

la tensión crítica ideal de Euler, para esta sección armada es: (ver publicación del autor "Pandeo por torsión y flexotorsión; de 2.005 ecuación 25 pág. 62, pág.50, 51 y 52 de pág.65)

$$F_{et} = \frac{1}{J_p} \left[\frac{\pi^2 E C_w}{L^2} + G J_t \right] = \frac{1}{384.500} \left[\frac{\pi^2 \cdot 2.100 \times 79.748.442}{(1.200)^2} + 807,7 \times 118.340 \right] = 251,576 \frac{\text{t}}{\text{cm}^2}$$

$$\lambda_c = \sqrt{F_y/F_e} = \sqrt{2,50/251,576} = 0,099686 \longrightarrow \chi = 1/1,1 = 0,9091 \text{ (curva c)}$$

$$P_{cr,t} = 0,9091 \times 2,50 \times 198 \times 2 = 900,01 \text{ t} > 779,88 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

con estos resultados, predomina la carga crítica de flexión según eje inmaterial, pandeo por flexión 791,1 t. como barra total y pandeo por torsión 900,01 t como barra total, y de pandeo local 787 t. en barra total, siendo esta última la menor de todas.

Queda todavía por verificar pandeo local a torsión, de la barrita de 100 cm del perfil I 400,

$$r_t = \sqrt{C_w + 0,039 J_t (KL)^2 / J_P} = \sqrt{3.824.221 + 0,039 \times 357 \times (100)^2 / 68.500} = 7,60$$

$$\lambda = 100 / 7,60 = 13,15 \quad \lambda_c = (13,15 / \pi) \cdot \sqrt{2,50 / 2.100} = 0,1444 \longrightarrow \chi = 1/1,1 = 0,9091$$

$$P_{cr,t} = 0,9091 \times 2,50 \times 198 = 450,00 \text{ t} > 449,99 \text{ t (pandeo por flexión)}$$

La carga crítica de pandeo por flexión, y la carga crítica de pandeo por torsión, son iguales en este caso particular, que ambas coinciden.

Verificación de pandeo por flexotorsión de la diagonal, y otras cargas que inciden sobre ella.

Por ser un angular, y no hay coincidencia entre el centro de gravedad y el centro de torsión, existe pandeo por flexotorsión, según los ejes y_1-y_1 y z_1-z_1 (ver figura) además de pandeo por flexión según el eje mínimo de inercia que fue calculado anteriormente (ver pandeo por flexotorsión del autor, 2.005, y las ecuaciones de página 79), debiéndose comprobar si la carga crítica de flexotorsión no es menor que la de flexión (angular de 50 x 5 mm)

$$\lambda_d = 70,7 / 1,51 = 46,82 \quad r_o = \sqrt{(1,51^2 + 1,15^2)} \cdot 2 = 2,684 \text{ cm}$$

$$C_w = 0,74425 \text{ cm}^6 \quad J_t = 0,39583 \text{ cm}^4$$

$$H = 1 - (1,15^2 \times 2) / 2,684^2 = 0,633 \quad F_{ey} = F_{ez} = \pi^2 \cdot 2.100 / 46,82^2 = 9,4549 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{et} = \{(\pi^2 \times 2.100 \times 0,74425) / (70,7)^2 + 807,7 \times 0,39583\} / (4,80 \times 2,684^2) = 9,335 \text{ t/cm}^2$$

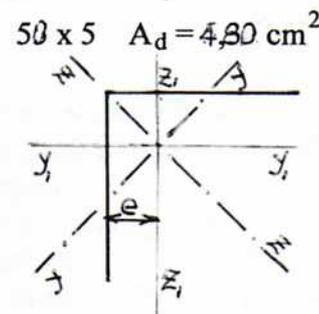
Con estos valores se plantea la ecuación de tercer grado (56) de página 79, de la publicación "Pandeo por flexotorsión" del autor

$$0,633 (F_e)^3 - 24,4733 (F_e)^2 + 265,918 F_e - 834,503 = 0$$

resolviéndola, se obtienen las tres raíces de la ecuación:

$$F_{e1} = 23,82821313235354 \text{ t/cm}^2 \quad F_{e2} = 5,84900981371191 \text{ t/cm}^2$$

$$F_{e3} = 9,45911196704671 \text{ t/cm}^2 \quad \lambda_c = \sqrt{2,50 / 5,849} = 0,6538$$



$$\chi = 0,7480 / 1,1 = 0,6800 \longrightarrow D_{cr} = 0,6800 \times 2,5 \times 4,80 = 8,16 \text{ t} > 5,23 \text{ t buenas condiciones.}$$

Puede observarse en este caso, da en buenas condiciones, pero predomina la carga crítica de pandeo por flexión (6,44 t), frente a la crítica de pandeo por flexotorsión (8,16 t).