

# **Análisis del cálculo de la esbeltez, en barras metálicas armadas, empresilladas comprimidas, según LRFD. Pandeo por flexión.**

Ingeniero Omar Miño – Profesor titular “Construcciones Metálicas I”- U,N,R.

Este documento es publicado por FCEIA para su consulta externa. El mismo se publica como Reporte de Investigación para divulgación de las tareas científicas que se desarrollan en la FCEIA, Universidad Nacional de Rosario. Los autores conservan los derechos de autoría y copia de la totalidad de su trabajo aquí publicado. Luego de su posterior eventual publicación externa a la FCEIA, los requerimientos deberán dirigirse a los autores respectivos. El contenido de este reporte refleja la visión de los autores, quienes se responsabilizan por los datos presentados, los cuales no necesariamente reflejan la de la SeCyT-FCEIA. Tanto la SeCyT-FCEIA como los autores del presente reporte no se responsabilizan por el uso que pudiera hacerse de la información y/o metodologías publicadas.

Cualquier sugerencia dirigirla a: [rtsecyt@fceia.unr.edu.ar](mailto:rtsecyt@fceia.unr.edu.ar)

**Resumen:** En estudios anteriores (Bleich aproximado ecuación 246), no se tiene en cuenta la variación del esfuerzo de corte, se lo toma como una constante. Tomándolo variable, se llega a modificar el segundo sumando de la ecuación simplificada de Bleich ( $0,82 \lambda^2$ ), comprobándose experimentalmente con ensayos de laboratorio, realizados por Zandonini y Astaneh-Goel, que la ecuación se ajusta bastante bien a los valores de los ensayos.

**Abstract:** In previous studies (Bleich, approximated equation 246) do not take into account the variation of shear, it takes it constant. Taking it variable, leads to change the second term of the simplified equation of Bleich ( $0,82 \lambda^2$ ), experimentally verified with laboratory tests made by Zandonini and Astaneh-Goel, and with this change the equation fits quite well with the values of tests.

**Noviembre de 2.009**

**Introducción.-** La esbeltez ideal de las barras armadas ( $\lambda_m$ ), que toma la bibliografía norteamericana, y que adopta la reglamentación: AISC-LRFD, la presentan de la siguiente manera: (Ver publicación del autor "Pandeo en el campo real de barras armadas, con diagonales y presillas" Nueva norma norteamericana y europea Febrero de 2.006)

1) con uniones remachadas ó tornillos apretados:

$$\left(\frac{K\ell}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{K\ell}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{a}{r_i}\right)^2} = \lambda_m \quad (211)$$

2) con uniones soldadas ó tornillos antideslizantes:

$$\left(\frac{K\ell}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{K\ell}{r}\right)_o^2 + 0,82 \cdot \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \left(\frac{a}{r_{ib}}\right)^2} = \lambda_m \quad (212)$$

$\left(\frac{K\ell}{r}\right)_o$  esbeltez de la columna armada actuando como una unidad.

$\left(\frac{K\ell}{r}\right)_m$  esbeltez modificada de la columna armada.

a distancia entre elementos de unión.  $\frac{a}{r_i}$  la mayor esbeltez de un componente (parante).

$\frac{a}{r_{ib}}$  esbeltez de un componente individual relativo a su eje baricentrico paralelo al eje de pandeo.

$r_i$  radio de giro mínimo de un componente individual.

$r_{ib}$  radio de giro de un componente individual relativo a su eje centroidal paralelo al eje de pandeo del miembro.

$\alpha$  relación de separación =  $h/(2 r_{ib})$ .

h distancia entre centros de gravedad de los componentes individuales, perpendicular al eje de pandeo de la columna.

Estas ecuaciones, deben ser analizadas y deducidas, con la finalidad de saber su alcance, precisión, y el valor de los factores que la integran.

**2.- Analisis de las ecuaciones.** Haciendo un análisis de las barras armadas empresilladas, a fin de obtener la carga crítica ideal ( $P_{cr,i}$ ), ver publicación del autor "Pandeo en el campo real de barras armadas, empresilladas y con diagonales", nueva norma norteamericana y europea – Febrero de 2.000, se llega a la ecuación (244) y siguientes (245), (246) y (247) en página 147 y 148.

$$\overline{P}_{cri} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_y^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E I_y}{l_y^2} a \left[ \frac{e}{12 E J_2} + \frac{a}{24 E J_1} + \frac{2(1+\mu)}{e E A_{2x}} + \frac{(1+\mu)}{a E A_{1x}} \right]} \quad (244)$$

El término que mas influencia tiene es el segundo, y cuando existe una determinada relación entre las rigideces del parante y la presilla y una determinada distancia entre presillas, se puede prescindir de los demás términos pues no tienen influencia, quedando entonces:

$$\sigma_{cri} = \frac{\overline{P}_{cri}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2} \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\lambda_y^2} \cdot \frac{1}{12} \lambda_1^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2 + \frac{\pi^2}{12} \lambda_1^2} \quad (245)$$

siendo  $\lambda_1 = a/i_{min}$   
 $i$  = radio de giro mínimo.

quedando la esbeltez ideal o modificada:  $\lambda_{yi} = \lambda_m = \sqrt{\lambda_y^2 + 0,82 \lambda_1^2}$  (246)

y esta es la fórmula que puede verse en el libro de Bleich, cuando los términos restantes pierden validez, pero los requisitos que deben cumplir para que esto ocurra no lo dá, lo único que se prescribe es la condición que debe cumplir la esbeltez local que es

$$\lambda_1 \leq 3/4 (K l / i) \quad (247)$$

La ecuación (246) es muy parecida a la ecuación (212) donde  $\pi^2/12 = 0,82$  y puede pensarse que la ecuación (212) tiene los lineamientos de la deducción para barras empesilladas.

La ecuación (211), es recomendada para uniones remachadas o tornillos apretados calibrados.

Viendo la ecuación (246), se observa que el coeficiente de  $\lambda_1$  es 0,82, y en la (211) aparece la unidad como coeficiente; esto es debido a que la unión trabaja al aplastamiento, los agujeros son normales, produciendose deformaciones y desplazamientos en las uniones, aumentando el valor del coeficiente y se aconseja tomar la unidad.

Queda ahora por analizar la ecuación (212), según figura 1:

$$J_o = 2 \left[ \frac{A_i (h)^2}{2} \right] = \frac{A_i h^2}{2} \quad \text{momento de inercia, despreciando las inercias propias de los dos perfiles.}$$

$$J_{ib} = A_i (r_{ib})^2 \quad \text{momento de inercia propio de un perfil, con respecto al eje 1-1 y paralelo al eje y-y.}$$

$$J_t = 2 J_{y1} + A_i (h/2)^2 \quad \text{momento de inercia de la barra, sin despreciar las inercias propias de cada perfil.}$$

$$r = \sqrt{\frac{J_t}{2 A_i}} \quad \text{radio de giro de la sección total armada}$$

$A_i$  = sección de uno de los perfiles de la barra armada

$r_{ib}$  = radio de giro de una barra componente, respecto de su eje baricentrico, paralelo al eje de pandeo analizado de la barra armada.

$J_t = 2 A_i r^2$  momento de inercia de la barra, sin despreciar las inercias propias de cada perfil.

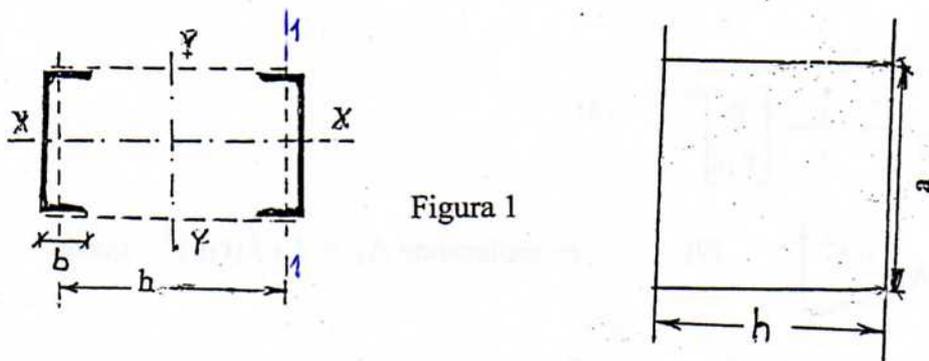


Figura 1

Siguiendo el análisis, realizado en la publicación del ing. Omar Miño "Pandeo en el campo real de barras armadas", nueva norma norteamericana, página 148, ecuación (244) de Febrero de 2.006, y teniendo presente la bibliografía de Bleich (año 1952), en la cual desprecian tres términos de la ecuación, y queda la ecuación (245), finalmente reducida a la (246), siendo esta una ecuación aproximada, pues se consideró el corte constante, y este tiene variación cosenoidal, influyendo en la carga crítica. A la ecuación se la corrige tomando  $J_o$  en el denominador, en lugar de  $J_b$ , quedando la (244) con la siguiente expresión, después de dividir por la sección total:

$$F_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\pi^2 J_o}{L_y^2} \cdot \frac{a^2}{24 J_{ib}} \right]} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\pi^2 J_o}{24 J_{ib} (\lambda_y)^2} \cdot \frac{a^2}{r^2} \right]} \quad (1)$$

buscando la esbeltez total de la barra

$$r^2 = J_t / 2 A_i \quad (2) \quad (\lambda_y)^2 = (L_y)^2 / r^2 \quad (3) \quad (L_y)^2 = (\lambda_y)^2 r^2 \quad (4)$$

reemplazando  $(L_y)^2$  en la ecuación anterior viene:

$$F_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2} \cdot \frac{1}{\left[ 1 + \frac{\pi^2 J_o}{24 J_{ib} (\lambda_y)^2} \cdot \frac{a^2}{r^2} \right]} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2} \cdot \frac{1}{\left[ (\lambda_y)^2 + \frac{\pi^2 J_o}{24 J_{ib}} \cdot \frac{a^2}{r^2} \right]} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{2 A_i}{J_t} \quad (6) \quad \text{reemplazando en la ecuación (5), queda:}$$

$$F_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2 + \frac{\pi^2 J_o}{24 J_t} \frac{a^2 2 A_i}{J_{ib}}} \quad (7) \quad \text{pero } J_{ib} = A_i (r_{ib})^2 \text{ que reemplazado en (7) queda:}$$

$$F_{cr,i} = \frac{\pi^2 E}{(\lambda_y)^2 + \frac{\pi^2 J_o}{12 J_t} \left[ \frac{a}{r_{ib}} \right]^2} \quad (8)$$

$$J_t = 2 J_{ib} + 2 \left[ A_i \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \quad (9) \quad \text{reemplazando } A_i = J_{ib} / (r_{ib})^2 \text{ queda}$$

$$J_t = 2 J_{ib} + 2 \left[ \frac{J_{ib}}{(r_{ib})^2} \cdot \frac{(h)^2}{2} \right] = 2 J_{ib} \left[ 1 + \left( \frac{h}{2 r_{ib}} \right)^2 \right] \quad (10)$$

llamando  $\alpha = h / 2 r_{ib}$  la ecuación (10) queda:

$$J_t = 2 J_{ib} (1 + \alpha^2) \quad \text{si ahora se busca la relación } J_o / J_t$$

$$\frac{J_o}{J_t} = \frac{A_i h^2 / 2}{2 J_{ib} (1 + \alpha^2)} = \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)} \quad \therefore \quad \left( \frac{KL}{r} \right)_m = \sqrt{\left( \frac{KL}{r} \right)_o^2 + 0.82 \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)} \left( \frac{\alpha}{r_{ib}} \right)^2} \quad (11)$$

En la bibliografía a  $\alpha$  se lo llama radio de separación.

En figura 2 puede verse la variación, en un sistema de ejes coordenados, de la relación  $J_o / J_t$  con  $\alpha$ . Se observa que este radio es asintótico, aproximándose a la unidad con el incremento de  $\alpha$ .

Por lo tanto la aproximación de Bleich es aceptable, para columnas armadas empresilladas, con separaciones grandes entre parantes, pues en estos casos  $J_o / J_t \cong 1$ . En figura 3, puede verse algunas secciones en las cuales tomando la relación de inercias  $J_o / J_t \cong 1$ , el error cometido es de aproximadamente un 20%, con respecto al valor de  $\alpha$ , y se trata de columnas empresilladas hechas con secciones pesadas, de pequeña altura, por ejemplo para W14 x 90, para otros casos esta aproximación de Bleich, puede tener un error del 36% en la determinación de  $\alpha$ , para barras en compresión.

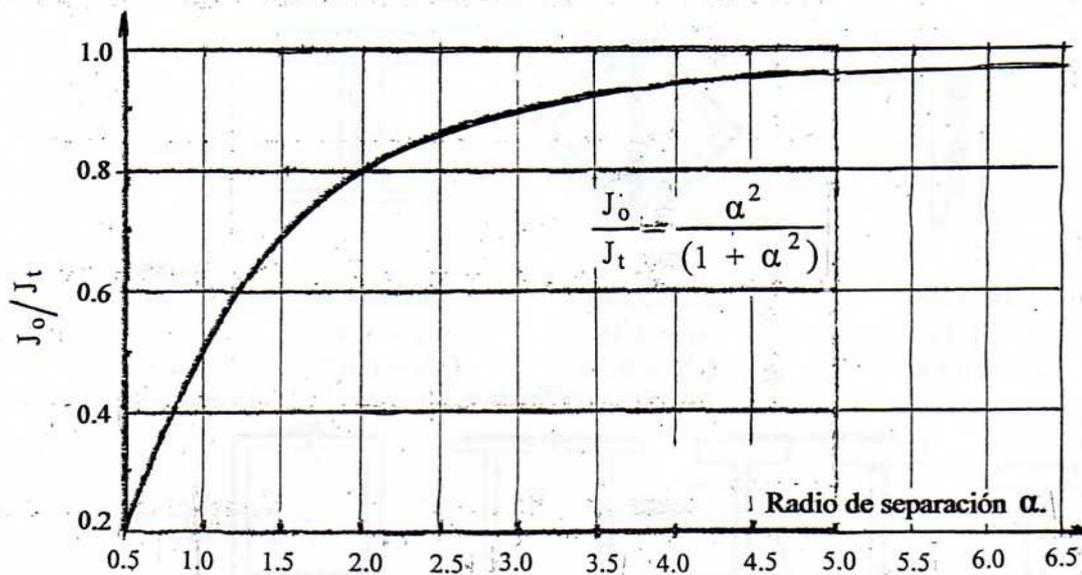


Figura 2.- Variación de  $J_o/J_t$  con  $\alpha$ ,

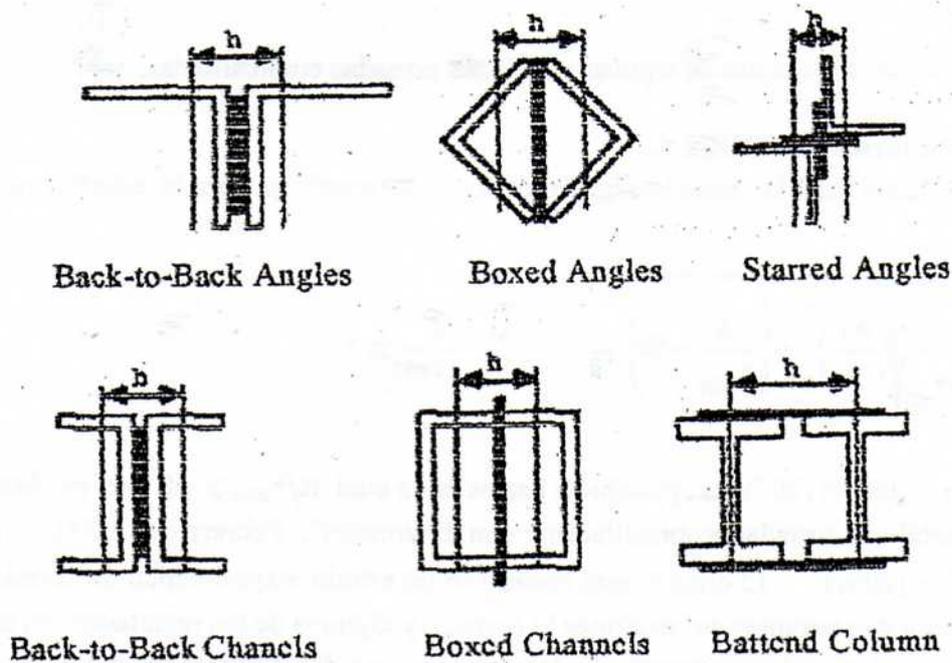


Figura 3.- Algunas secciones comunes de barras armadas empresilladas.

En figura 4, se presentan secciones armadas, con diferentes secciones de perfiles laminados, en la cual pueden observarse, los valores de  $\alpha$  y la relación  $J_o/J_t$ , donde pueden verse sus diferentes valores.

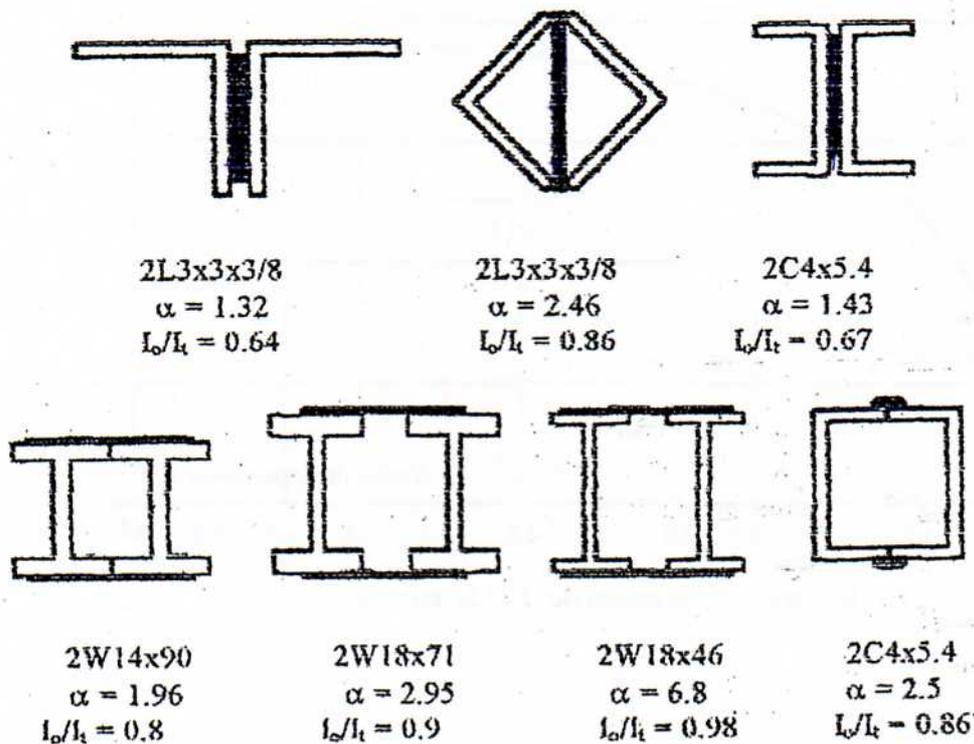


Figura 4.- Radio de separación de algunas secciones armadas empresilladas.

#### Ecuación empírica de LRFD.

La especificación LRFD, tiene la siguiente ecuación empírica, para la esbeltez modificada:

$$(12) \quad \left(\frac{KL}{r}\right)_m = \sqrt{\left(\frac{KL}{r}\right)_o^2 + \left(\frac{a}{r_{\min}} - 50\right)^2} \quad \text{si } \frac{a}{r_{\min}} \geq 50$$

La primera ecuación (207), es aplicable a barras en la cual  $a/r_{\min} \geq 50$  (ver publicación del autor "Barras metálicas armadas empresilladas y con diagonales", Febrero de 2.000, página 140 ecuaciones (207) y (208)). El criterio está basado en un estudio experimental de Zandonini, en barras armadas, con dos parantes de secciones U (canal), y algunos de los resultados del experimento de Astaneh y Goel para barras empresilladas armadas con dos parantes angulares. Existen diferencias entre la proposición analítica (8) y la empírica (207).

El efecto del radio de separación  $\alpha$ , no se tiene en cuenta en la ecuación empírica de LRFD, y está basada en ensayos con una separación específica de  $\alpha$ , por el contrario la ecuación analítica (8) ó (212), incluye el efecto del radio de separación, con el coeficiente  $\alpha^2 / (1 + \alpha^2)$ .

La proposición de la ecuación analítica (8), usa el radio de giro correspondiente a ejes paralelos al eje principal de pandeo, que es  $r_{ib}$ , para pandeo local de un parante. Por el contrario, la

la ecuación empírica de LRFD (12), usa el radio de giro mínimo  $r_{min}$ , y no necesariamente correspondiente a veces a un eje paralelo al eje principal, como sucede en una sección armada con dos ángulos.

**Verificación de la ecuación (11)**

Se toman dos aproximaciones en este estudio, para verificar la ecuación analítica (11). En primer lugar se realiza un estudio paramétrico, para diferentes esbelteces globales e individuales, para pandeo según ecuación empírica LRFD ecuación (12); el mismo trabajo se hace para la ecuación analítica aproximada de Bleich (246), y lo mismo para la ecuación analítica propuesta (11) ó (212), como asimismo se lo compara también con la reglamentación anterior AISC-ASD, como puede verse en tabla 1.

| 1                       | 2          | 3                                      | 4                     | 5                       | 6                           | 7   | 8                     | 9                       |
|-------------------------|------------|--|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|---|-----------------------|-------------------------|
| $\frac{a}{r_{Min}}$ (b) | $\alpha$ , | $\left(\frac{KL}{r}\right)_{Modified}$ |                       |                         | $(P_{cr})_{AISC}^{(a,f,g)}$ | $\frac{(P_{cr})_{Modified}^{(h)}}{(P_{cr})_{Unmodified}^{(h)}}$ |                       |                         |
|                         |            | LRFD <sup>(c)</sup>                    | Bleich <sup>(d)</sup> | Proposed <sup>(e)</sup> | $(P_{cr})_{LRFD}$           | LRFD <sup>(g)</sup>   | Bleich <sup>(g)</sup> | Proposed <sup>(g)</sup> |
| 50.0                    | 0.0        |  |                       | 50.0                    |                             |   |                       | 1.00                    |
|                         | 1.0        |  |                       | 59.4                    |                             |   |                       | .947                    |
|                         | 2.0        |  |                       | 64.3                    |                             |   |                       | .917                    |
|                         | 3.0        | 50.0                                   | 67.5                  | 65.9                    | 1.05                        | 1.0   | .897                  | .907                    |
|                         | 4.0        |  |                       | 66.6                    |                             |   |                       | .903                    |
|                         | 5.0        |  |                       | 66.9                    |                             |   |                       | .901                    |
|                         | 6.0        |  |                       | 67.0                    |                             |   |                       | .900                    |
|                         | 7.0        |  |                       | 67.1                    |                             |   |                       | .900                    |

a.  $F_y = 36$  ksi  
 b.  $r_{lb}$  and  $r_{Min}$  are assumed equal, like in double channel  
 c. LRFD empirical Eq. 15  
 d. Bleich's approximate analytical Eq. 5  
 e. Proposed exact analytical Eq. 5  
 f. AISC method using  $KL/r = 50$ , without using factor of safety  
 g. LRFD<sup>1</sup> method using corresponding modified  $KL/r$ , without using the resistance factor  
 h. Unmodified strength calculated from LRFD using  $KL/r = 50$

La columna (1) brinda la esbeltez local, la (2) la variación de  $\alpha$ , la (3), (4) y (5) la esbeltez total modificada para LRFD (empírica), Bleich (aproximado) y la ecuación propuesta (11)

(3)  
 LRFD empír.  $\lambda_m = \sqrt{50^2} = 50 \rightarrow \lambda_{cm} = 0,56 \rightarrow \chi = 0,7454 \rightarrow F_{cr} = 26,84$  Ksi con  $\phi = 0,85$   
 s/ modif.

(4)  
 Bleich  $\lambda_m = \sqrt{50^2 + 0,82 \times 50^2} = 67,453 \rightarrow \lambda_{cm} = 0,7565 \rightarrow \chi = 0,67 \rightarrow F_{cr} = 24,12$  Ksi  $\phi = 0,85$

(5)  $\alpha = 3,0$

Ecuac (11)  $\lambda_m = \sqrt{50^2 + \{3^2 / (1 + 3^2)\} 0,82 \cdot 50^2} = 65,917$  ----  $\lambda_{cm} = 0,7393$  ----  $\chi = 0,6763$

$F_{cr} = 0.6763 \times 36 = 24,34$  ksi

ASD  $F_{cr} = \{1 - 0,5 (50 / 126,1)^2\} 36 = 0,9607 \times 36 = 33,17$  Ksi

Renglón (6) es la relación entre ASD y LRFD (empírica), esta última con  $\phi = 1,0$ , y este valor es  $F_{cr} = 26,84 / 0,85 = 31,57$  Ksi

ASD / LRFD (empírica) =  $33,17 / 31,57 = 1,05$

Renglón (7) es la relación entre LRFD<sub>modif, ec. (12)</sub> / LRFD<sub>sin modificar, ec. (12)</sub> =  $26,84 / 26,84 = 1,00$

Renglón (8) es la relación entre Bleich (modif., ecuac. 246) y LRFD (empírica, s/modif. ec.12) =  $24,12 / 26,84 = 0,898$

Renglón (9) es la relación entre LRFD<sub>propuesta, ecuación (11) $\alpha=3,$</sub>  / LRFD<sub>empírica, s/modif. ec (12)</sub> =  $24,34 / 26,84 = 0,907$

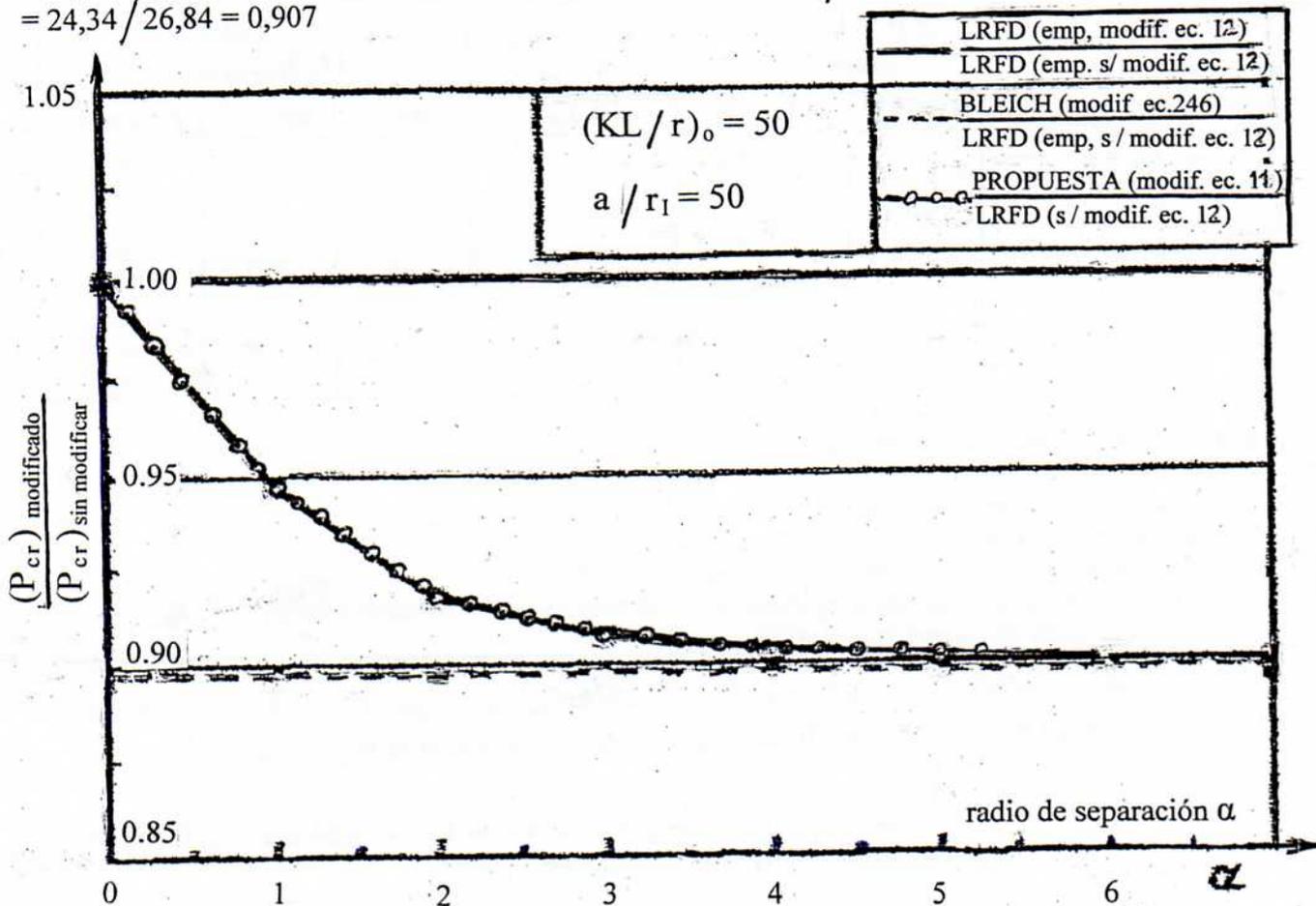


Figura 5.- Comparación de las cargas críticas de pandeo calculadas, con respecto a LRFD empírica, Bleich no modificado ó aproximado y LRFD propuesta y deducido analíticamente.

Puede verse en tabla 1, que entre LRFD (Propuesta ec. (11)) y LRFD empírico, el error depende de  $\alpha$ , dando para  $\alpha = 7,0$  una diferencia del 10% (renglón 9). Entre LRFD (Bleich modificado) y LRFD empírica, una diferencia del 10% (renglón 8).

En figura 5, puede verse la representación gráfica de estos valores, en el eje de las abscisas toma el valor de  $\alpha$ , y en la ordenada la relación de cargas críticas.

Este mismo trabajo, se realiza, para esbelteces locales de 50 y 100 y esbelteces globales de 100, como se ve en tabla 2, y con el mismo criterio anterior, y la diferencia entre ASD y LRFD empírica la diferencia es del 16% (columna 6); en cambio las relaciones de LRFD (Bleich modificado) y LRFD empírica se mantienen en la misma relación, como así mismo las relaciones de LRFD (Propuesta ec. 11) y LRFD empírica sin variar, con respecto a la tabla 1, y esto pasa pues se está en rango de campo inelástico o elástico-plástico, mientras la esbeltez local es 50. En figura 6, puede verse, la representación gráfica de estos valores, como siempre en las abscisas el valor de  $\alpha$ , y en las ordenadas la relación de cargas críticas.

Pero cuando la esbeltez local tiene un valor de 100 y la global también de 100, en este caso la relación entre ASD y LRFD empírica es de 32% (renglón 6), y las otras tres relaciones varían, con respecto a los valores anteriores, pues en una se está en campo inelástico y la otra en campo elástico, como se ve en la tabla 2. La representación gráfica puede verse en figura 7.

**Table 2.**  
**Modified Strength of Built-Up Struts According to LRFD Empirical,**  
**Bleich's Approximate Analytical, and Proposed Exact Analytical**  
**Equations for Medium Slenderness Ratio of 100**

| 1                        | 2        | 3                                      | 4      | 5        | 6                 | 7   | 8    | 9      |
|--------------------------|----------|--|--------|----------|-------------------|---|------|--------|
| $\frac{\alpha}{F_{Min}}$ | $\alpha$ | $\left(\frac{KL}{r}\right)_{Modified}$ |        |          | $(P_{cr})_{AISC}$ | $\frac{(P_{cr})_{Modified}}{(P_{cr})_{Unmodified}}$ |      |        |
|                          |          | LRFD                                   | Bleich | Proposed |                   | $(P_{cr})_{LRFD}$                                   | LRFD | Bleich |
| 50.0                     | 0.0      |  |        | 100.0    |                   |   |      | 1.00   |
|                          | 1.0      |  |        | 105.0    |                   |   |      | .947   |
|                          | 2.0      |  |        | 107.9    |                   |   |      | .917   |
|                          | 3.0      | 100.0                                  | 109.8  | 108.8    | 1.16              | 1.00  | .897 | .907   |
|                          | 4.0      |  |        | 109.2    |                   |   |      | .903   |
|                          | 5.0      |  |        | 109.4    |                   |   |      | .901   |
|                          | 6.0      |  |        | 109.5    |                   |   |      | .900   |
|                          | 7.0      |  |        | 109.6    |                   |   |      | .900   |
| 100.0                    | 0.0      |  |        | 100.0    |                   |   |      | 1.00   |
|                          | 1.0      |  |        | 118.7    |                   |   |      | .806   |
|                          | 2.0      |  |        | 128.7    |                   |   |      | .708   |
|                          | 3.0      | 111.8                                  | 135.0  | 131.8    | 1.32              | .877  | .648 | .678   |
|                          | 4.0      |  |        | 133.1    |                   |   |      | .666   |
|                          | 5.0      |  |        | 133.7    |                   |   |      | .660   |
|                          | 6.0      |  |        | 134.1    |                   |   |      | .657   |
|                          | 7.0      |  |        | 134.3    |                   |   |      | .654   |

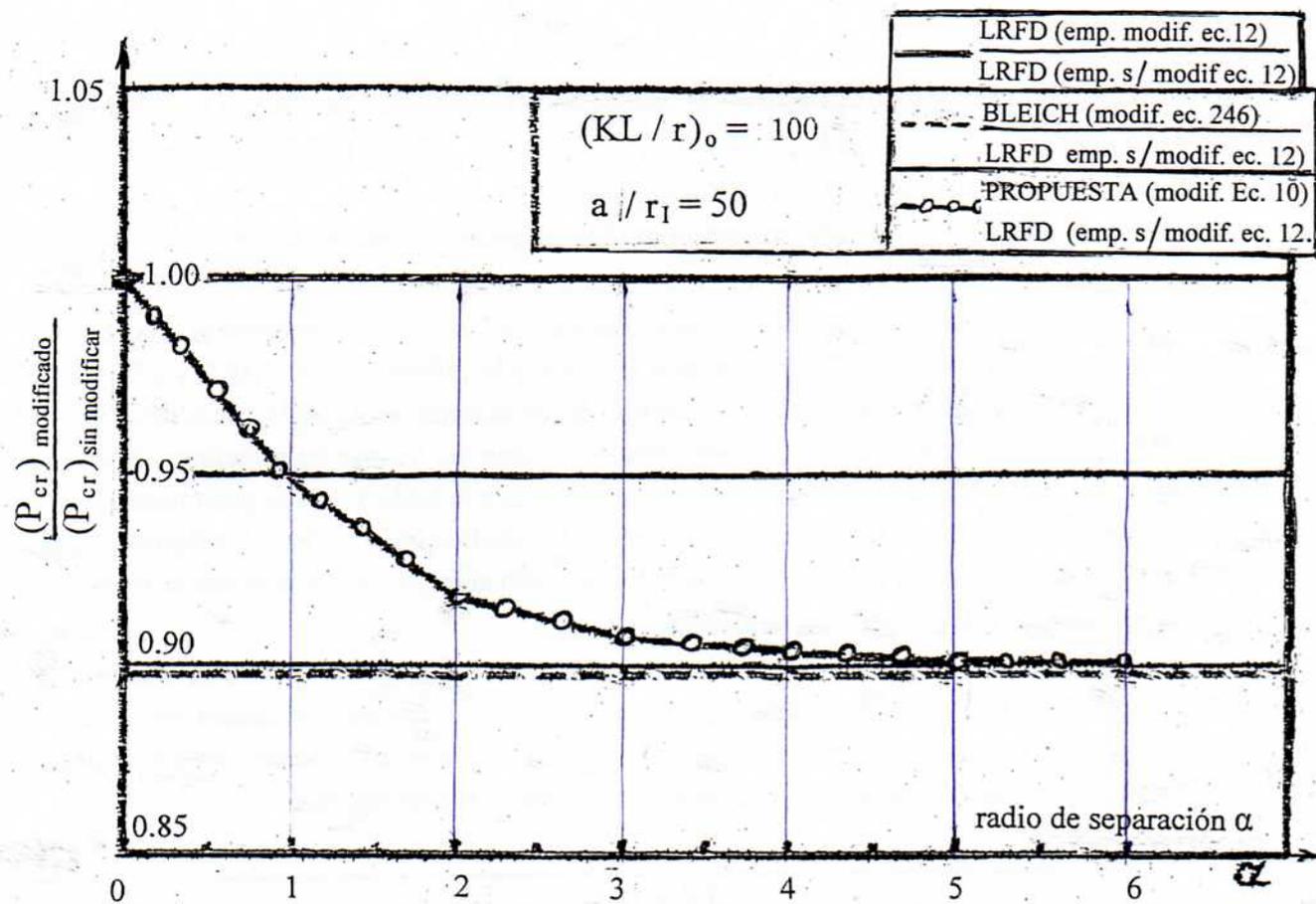


Figura 6. Comparación de las cargas críticas de pandeo calculadas, con respecto a LRFD empírica, Bleich no modificado o aproximado y LRFD propuesta y deducida analíticamente.

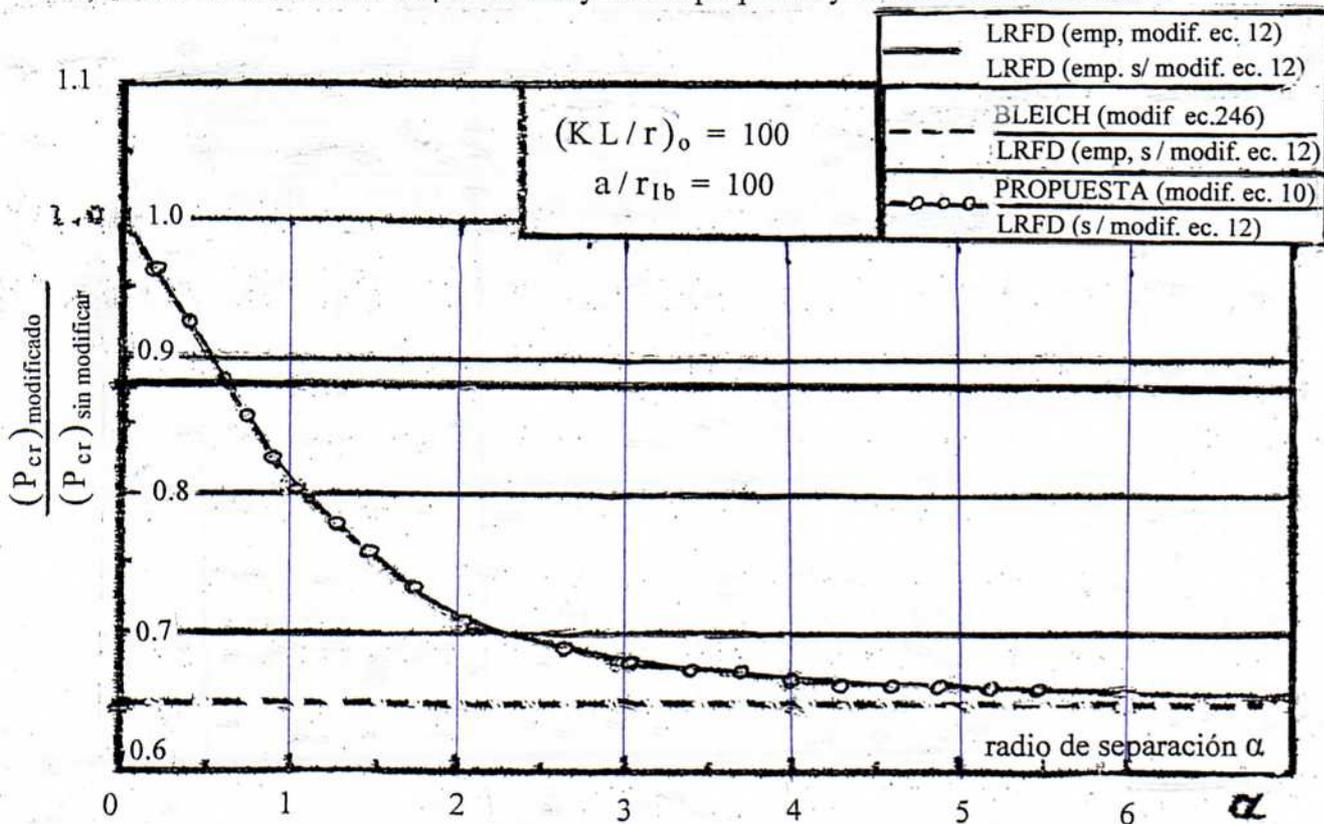


Figura 7. Comparación de las cargas críticas de pandeo calculadas, con respecto a LRFD empírica, Bleich no modificado o aproximado y LRFD propuesta y deducida analíticamente.

Con respecto a la tabla 2, se tiene lo siguiente, para esbeltez global de 100 y esbeltez local 50:

$$\text{LRFD (empír. modif. ec. 12)} \quad \lambda = \sqrt{100^2 + (50 - 50)^2} = 100 \longrightarrow \lambda_c = 1,1215 \longrightarrow \chi = 0,502$$

$$F_{cr} = 18,075 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85.$$

$$\text{LRFD (empír. s/modif. ec. 12)} \quad \lambda = \sqrt{100^2} = 100 \longrightarrow \lambda_c = 1,1215 \longrightarrow \chi = 0,502$$

$$F_{cr} = 18,075 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85.$$

$$\text{Bleich (modif. ec. 246.)} \quad \lambda_m = \sqrt{100^2 + 0,82 \times 50^2} = 109,8 \longrightarrow \lambda_c = 1,231413 \longrightarrow$$

$$\chi = 0,4506 \longrightarrow F_{cr} = 16,22 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85$$

$$\text{Propuesta (modif. ec. 11 y } \alpha = 3) \text{ } \lambda_m = \sqrt{100^2 + 0,82 \{3^2 / (1 + 3^2)\} \times 50^2} = 108,8 \longrightarrow$$

$$\lambda_c = 1,22 \longrightarrow \chi = 0,4558 \longrightarrow F_{cr} = 16,409 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85.$$

$$\text{ASD} \longrightarrow F_{cr} = \{1 - 0,5 (100/126,1)^2\} 36 = 24,68 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 1,00.$$

$$\text{Renglón (6)} \quad \text{ASD/LRFD(empír., ec. 12)} = 24,68 / 21,265 = 1,16 \quad (\text{LRFD empírica ec. 12})$$

$$\text{con } \phi = 1,0$$

$$\text{Renglón (7) es la relación entre LRFD (empír. modif., ec. 12)/LRFD (empír. sin modif. Ec. 12) =}$$

$$= 18,075 / 18,075 = 1,00.$$

$$\text{Renglón (8) es la relación entre Bleich (modif. Ec. 246) y LRFD (empírica s/modif. ec. 12) =}$$

$$= 16,22 / 18,075 = 0,897.$$

$$\text{Renglón (9) es la relación entre LRFD (Propuesta, ec.11, } \alpha = 3) \text{/LRFD (empírica s/modif, ec 12)}$$

$$= 16,41 / 18,075 = 0,907$$

En tabla 2, cuando la esbeltez global es de 100 y esbeltez local es de 100, viene:

$$\text{LRFD (empír.modif. ec. 12)} \quad \lambda_m = \sqrt{100^2 + (100 - 50)^2} = 111,8 \longrightarrow \lambda_c = 1,25384 \longrightarrow \chi = 0,4402$$

$$F_{cr} = 15,847 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85.$$

$$\text{LRFD (empírica s/modif. ec.12)} \quad \lambda = 100 \longrightarrow \lambda_c = 1,1215 \longrightarrow \chi = 0,502 \longrightarrow F_{cr} = 18,075 \text{ Ksi}$$

$$\text{Bleich (modif. ec. 246)} \quad \lambda_m = \sqrt{100^2 + 0,82 \times 100^2} = 135 \longrightarrow \lambda_c = 1,514 \longrightarrow \chi = 0,3256$$

$$F_{cr} = 11,72 \text{ Ksi} \quad \text{con } \phi = 0,85.$$

Propuesta (modif. ec. 11 y  $\alpha = 3$ )  $\lambda_m = \sqrt{100^2 + 0,82 \{3^2 / (1 + 3^2)\} \times 100^2} = 131,8 \longrightarrow$   
 $\lambda_c = 1,478 \longrightarrow \chi = 0,3406 \longrightarrow F_{cr} = 12,264 \text{ Ksi con } \phi = 0,85$

ASD -----  $F_{cr} = \{1 - 0,5 (100/126,1)^2\} 36 = 24,68 \text{ Ksi con } \phi = 1,00$

Renglón (6) ASD / LRFD (empír. ec.12) =  $26,68 / 18,644 = 1,32$  (LRFD empír. ec. 12 con  $\phi = 1,0$ )

Renglón (7) relación entre LRFD (empír. modif. ec.12) / LRFD (empírica sin modif. ec. 12) =  
 $= 15,847 / 18,075 = 0,877.$

Renglón (8) relación entre Bleich (modif. ec. 246) y LRFD (empírica sin modif, ec. 12) =  
 $= 11,72 / 18,075 = 0,648$

Renglón (9) relación entre LRFD (Propuesta ec. 11,  $\alpha = 3$ ) / LRFD (empírica sin modif. ec. 12) =  
 $= 12,264 / 18,075 = 0,678$

En tabla 3 puede observarse, el mismo estudio cuando la esbeltez local toma el valor de 50, y la esbeltez global 150, como asimismo cuando la esbeltez local es de 100 y la esbeltez global 150.

**Table 3.**  
**Modified Strength of Built-Up Struts According to LRFD Empirical,**  
**Bleich's Approximate Analytical, and Proposed Exact Analytical**  
**Equations for Large Slenderness Ratio of 150**

| 1                   | 2   | 3                                      | 4      | 5        | 6                 | 7   | 8      | 9        |
|---------------------|-----|--|--------|----------|-------------------|---|--------|----------|
| $\frac{a}{r_{Min}}$ | $a$ | $\left(\frac{KL}{r}\right)_{Modified}$ |        |          | $(P_{cf})_{AISC}$ | $\frac{(P_{cf})_{Modified}}{(P_{cf})_{Unmodified}}$ |        |          |
|                     |     | LRFD                                   | Bleich | Proposed | $(P_{cr})_{LRFD}$ | LRFD  | Bleich | Proposed |
| 50.0                | 0.0 |  |        | 150.0    |                   |   |        | 1.00     |
|                     | 1.0 |  |        | 153.4    |                   |   |        | .956     |
|                     | 2.0 |  |        | 155.4    |                   |   |        | .932     |
|                     | 3.0 | 150.0                                  | 156.7  | 156.0    | 1.14              | 1.00  | .916   | .924     |
|                     | 4.0 |  |        | 156.3    |                   |   |        | .921     |
|                     | 5.0 |  |        | 156.4    |                   |   |        | .919     |
|                     | 6.0 |  |        | 156.5    |                   |   |        | .919     |
|                     | 7.0 |  |        | 156.6    |                   |   |        | .918     |
| 100.0               | 0.0 |  |        | 150.0    |                   |   |        | 1.00     |
|                     | 1.0 |  |        | 163.1    |                   |   |        | .846     |
|                     | 2.0 |  |        | 170.5    |                   |   |        | .774     |
|                     | 3.0 | 158.1                                  | 175.3  | 172.9    | 1.27              | .900  | .732   | .753     |
|                     | 4.0 |  |        | 173.0    |                   |   |        | .745     |
|                     | 5.0 |  |        | 174.3    |                   |   |        | .741     |
|                     | 6.0 |  |        | 174.6    |                   |   |        | .738     |
|                     | 7.0 |  |        | 174.7    |                   |   |        | .737     |

En tabla 3 puede observarse, el mismo estudio cuando la esbeltez local toma el valor de 50, y la esbeltez global 150, como asimismo cuando la esbeltez local es de 100 y la esbeltez global 150.

La relación ASD / LRFD (empírica) arroja una diferencia de 14% (columna 6), frente al 16% de la tabla 2, con respecto a la relación LRFD (modificada ec. 12) / LRFD (empírica sin modificar ec 12), BLEICH (aproximada ec. 246) / LRFD (sin modificar ec 12), y la PROPOSICIÓN ec 11 / LRFD (empírica sin modificar ec 12), son algo mayores que los de tabla 2. Se debe tener en cuenta que las esbelteces totales están todas en campo elástico. En figura 8 y figura 9 pueden verse la representación gráfica.

Puede concluirse que, en todos los casos la proposición analítica (ecuación 11), con respecto a la ecuación de Bleich aproximada, los resultados matemáticos son iguales, cuando  $J_o/J_t = 1,0$  o sea cuando no se toma en cuenta el corte flexible, como se ve en ecuación (8), quedando en definitiva la ecuación de Bleich aproximada (ec. 246). El radio de separación  $(h/2 r_{ib}) = \alpha$ , y  $J_o/J_t = \{\alpha^2 / (1 + \alpha^2)\}$ , y esta última es variable entre cero y 1,0, y como está comprendido entre estos dos valores, el segundo sumando que se encuentra adentro de la raíz de la ecuación (11), disminuye, y entonces la esbeltez global también disminuye, y se obtiene un valor mayor de la carga crítica, entonces a medida que  $\alpha$  decrece, la carga crítica crece; y viceversa: a medida que  $\alpha$  crece, la carga crítica se aproxima a la ecuación aproximada de Bleich (ec. 246). En figura 4, se presentan algunas secciones con  $\alpha$  pequeños y  $J_o/J_t$  también pequeños; para  $\alpha = 1,0$ , la carga crítica de Bleich aproximada (ec.246) es 5% menor que la "propuesta" (ec. 11), como se ve en la sección armada formada por dos perles angulares o también por perfiles canales (PU), pero cuando  $\alpha = 8,5$ , las cargas críticas difieren, término medio en 1,0% (la de Bleich es menor en 1,0%), y es-

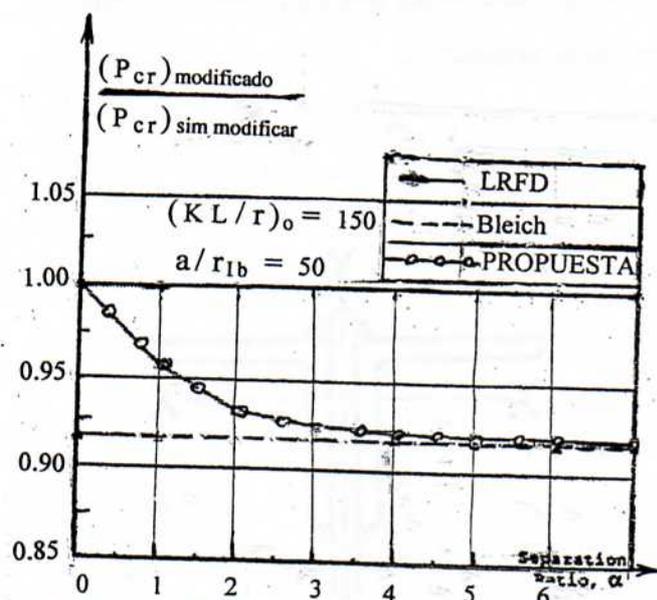


Figura 8. Comparación de las cargas críticas calculadas de pandeo, con respecto a LRFD empírica, Bleich aproximado ec. 246 y LRFD propuesta y deducida analíticamente ec 11- Esbeltez global 150 y local 50.

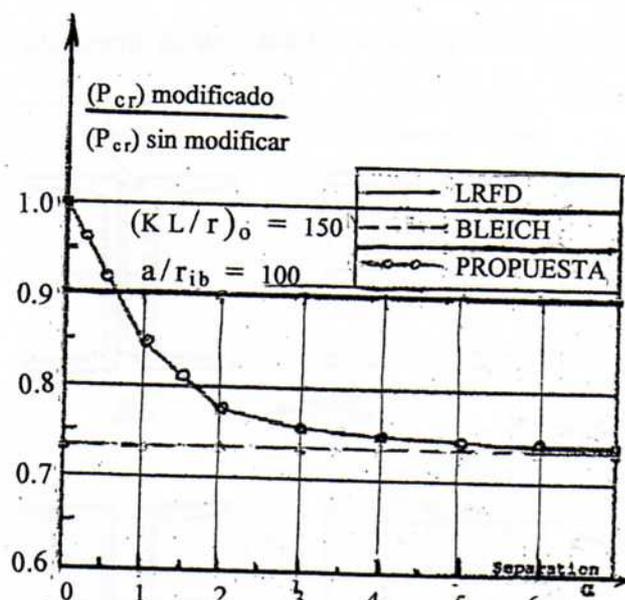


Figura 9. Comparación de las cargas críticas calculadas de pandeo, con respecto a LRFD empírica, Bleich aproximado ec. 246 y LRFD propuesta y deducida analíticamente ec. 11. Esbeltez global 150 y local 100..

esto significa que, para valores cercanos a 8,5 la diferencia es insignificante, y está del lado de la seguridad, es decir cuando la distancia entre perfiles es grande, como se ve en figura 4..

Lógicamente que todo esto es teoría, y deben realizarse ensayos de laboratorio a fin de corroborar si estos resultados reales, son iguales o cercanos a los que brinda la teoría, no hay otra manera de confrontarlos y compararlos, para saber si estos resultados teóricos tienen visos de realidad.

Los ensayos fueron realizados por R. Zandonini en barras armadas, cuya sección está formada por dos perfiles canales (perfiles U) empresillados y unidos a los parantes por medio de soldaduras o tornillos calibrados trabajando a fricción. En cambio otros dos investigadores Astaneh Asl y Goel S.C., realizaron los ensayos sobre barras armadas, con secciones formadas por dos perfiles ángulos empresillados soldados, y empresillados abulonados como se ve en figura 10, y algunos de estos resultados se ven en la tabla 4.

En esta tabla estan indicados los diferentes specimen, la tensión de fluencia del acero, la esbeltez global, la esbeltez local, la esbeltez total modificada para las dos ecuaciones, la propuesta con ecuación (11) y LRFD modificada ecuación (12), y en la columna 8 la relación de “Resultado del ensayo de laboratorio / LRFD sin modificar ec. (12)”, en columna 9 la relación de las ecuaciones “LRFD modificada ec. (12) / LRFD sin modificar ec.(12), y en columna 10 la relación de las ecuaciones “Propuesta ec. (11) / LRFD sin modificar ec. (12).

Se observa que las diferencias entre el test y la proposición, en las dos primeras y la cuarta la diferencia es mínima (6% y 4%) y los valores de la propuesta estan por debajo del test, en cambio en el tercero la diferencia está en el órden del 11%, y en en la cuarta es del 2% y tambien por debajo del test., de lo que se desprende que la propuesta da resultados razonables.

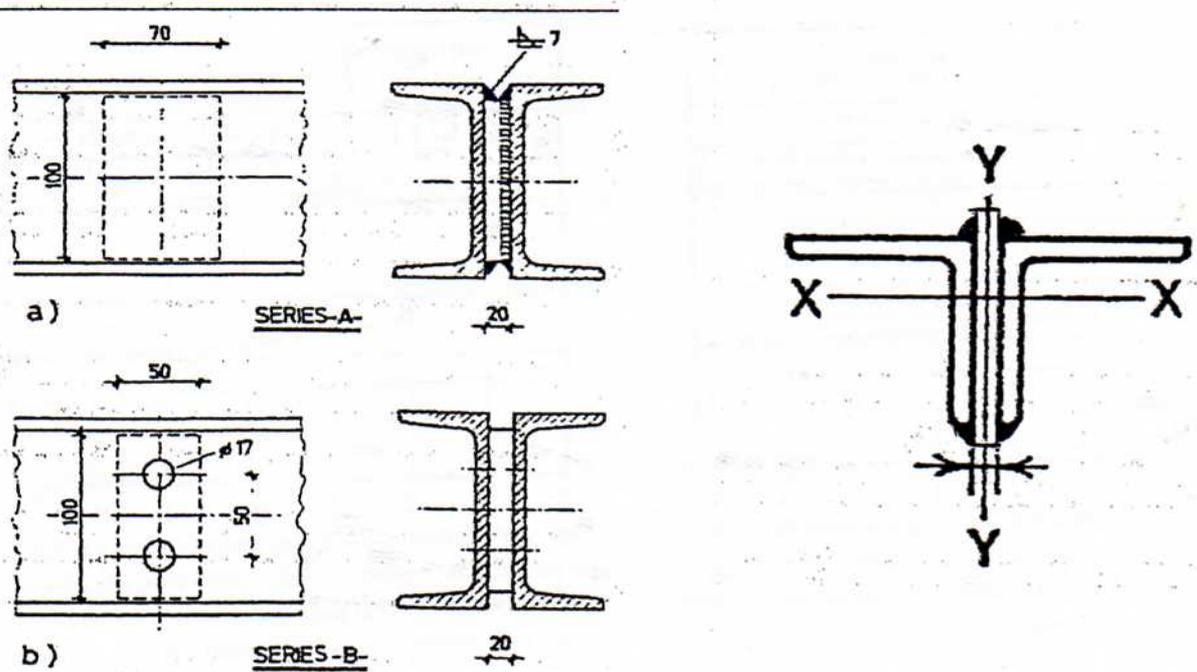


Figura 10.- Secciones y detalles de conexión, usados por Zandonini y Astaneh – Goel en los ensayos de laboratorio.

**Table 4.**  
**Comparisons of the Measured Buckling Load with the Calculated Buckling Load According to LRFD Empirical, Bleich's Approximate Analytical, and Proposed Exact Analytical Equations**

| 1     | 2                    | 3                               | 4                  | 5                   | 6  | 7                   | 8   | 9     | 10       |
|-------|----------------------|---------------------------------|--------------------|---------------------|--|---------------------|---|-------|----------|
| Spec  | $F_y^{(a)}$<br>(ksi) | $\left(\frac{KL}{r_y}\right)_o$ | $\frac{a}{r_{lb}}$ | $\frac{a}{r_{Min}}$ | $\left(\frac{KL}{r_y}\right)_{Modified}$ |                     | $\frac{(P_{cr})_{Modified}^{(b)}}{(P_{cr})_{Unmodified}^{(b)}}$ |       |          |
|       |                      |                                 |                    |                     | Proposed <sup>(e)</sup>                  | LRFD <sup>(e)</sup> | Test  | LRFD  | Proposed |
| AB1   | 46.4                 | 113                             | 74.8               | 101.1               | 123.5                                    | 124.0               | 0.899   | 0.837 | 0.843    |
| AB2   | 47.0                 |                                 | 50.3               | 68.0                | 117.9                                    | 114.4               | 0.962   | 0.978 | 0.924    |
| AXH13 | 43.7                 | 83                              | 63.0               | 63.0                | 97.5                                     | 84.0                | 0.939   | 0.989 | 0.834    |
| AXH14 | 43.7                 |                                 | 93.7               | 93.7                | 112.5                                    | 93.8                | 0.686   | 0.885 | 0.670    |

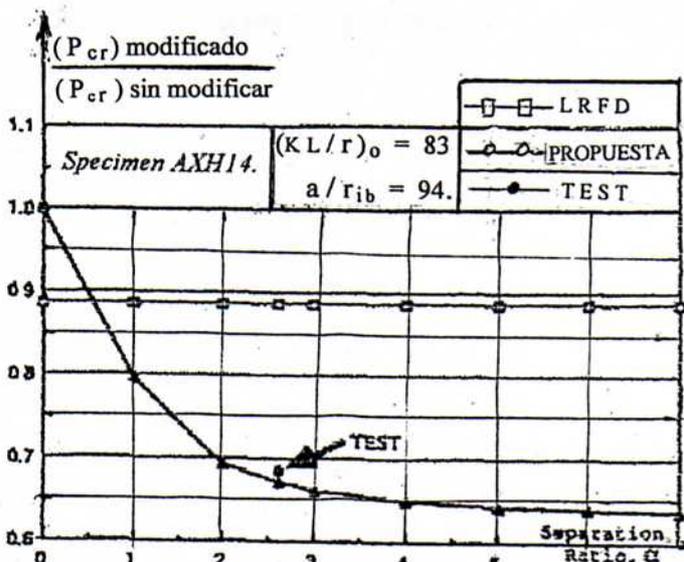
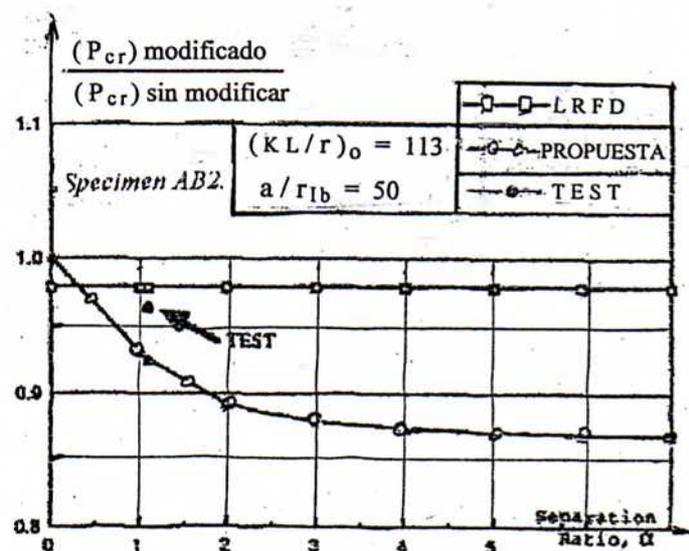
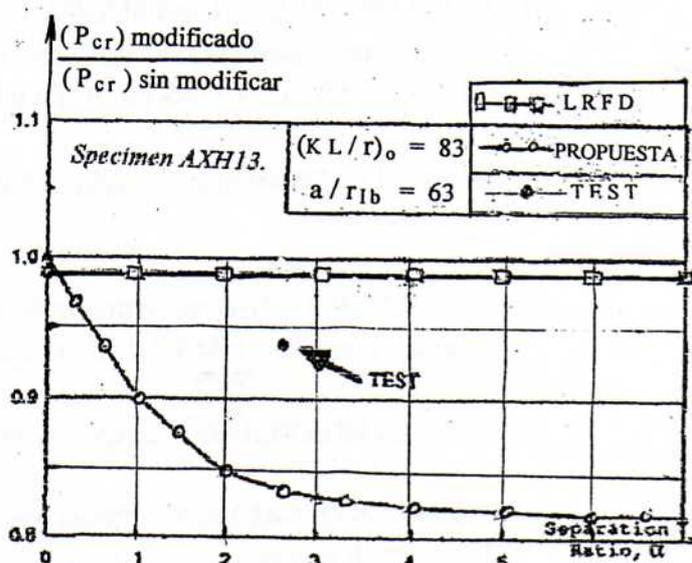
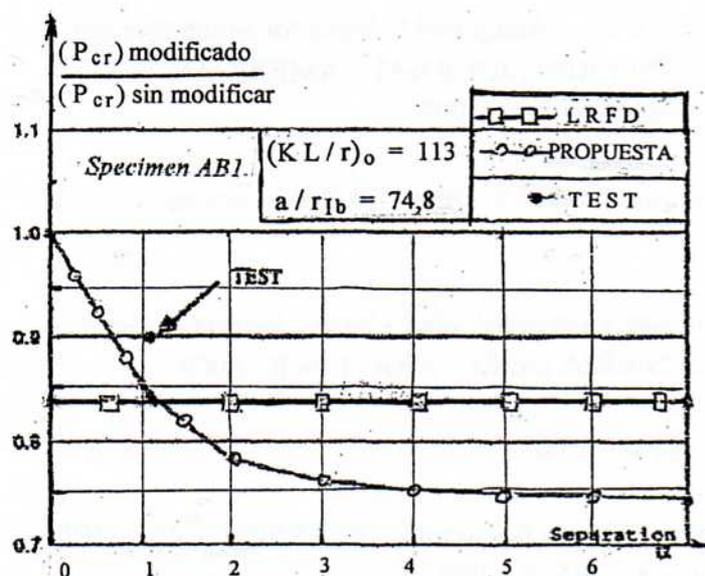


Figura 12. Comparación de las cargas críticas calculadas de pandeo, con respecto a LRFD empírica, a LRFD propuesta deducida analíticamente ec. 11, y al resultado de los ensayos de laboratorio para diferentes secciones de barras, con distintas esbelteces globales y distintas esbelteces locales.

## R E F E R E N C I A S

- 1.- ZAHN C.J. and GEERHARD HAAIJER – “Effect of Connector Spacing and Flexural-Torsional Buckling on Double-angle Compressive Strength” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION- Third Quarter / 1.988.
- 2.—FARHANG ASLANI and SUBHASH C. GOEL- “An Analytical Criterion Bucklyn Strength of Built-up Compresión Menbers” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION- Third Quarter / 1991.
- 3.- FARHANG ASLANI and SUBHASH C: GOEL – “Analytical Criteria for Stitch Strength Of Built-up Compression Members” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTI-TUTE OF STEEL CONSTRUCTION – Third Quarter / 1.992.
- 4.- BLEICH F.- “Buckling Strength of Metal Structures” Mc Grau-Hill Book Company–1.952 pp. 176-179.
- 5.- OMAR MIÑO – “Barras Armadas Reticuladas y Empresilladas”- Nueva Norma Norteamericana y Europea.- FACULTAD DE INGENIERIA DE ROSARIO U.N.R. 2.006.
- 6.- NORMA NORTEAMERICANA AISC-LRFD – 2.005.
- 7.- CHARLES G. SALMON – “Steel Structures, Design Behavior” – PEARSON PRENTICE JOHN E. JOHNSON HALL – ( método LRFD) 2.009.  
FARIS A. MALHAS

## R E F E R E N C I A S

- 1.- ZAHN C.J. and GEERHARD HAAIJER – “Effect of Connector Spacing and Flexural-Torsional Buckling on Double-angle Compressive Strength” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION- Third Quarter / 1.988.
- 2—FARHANG ASLANI and SUBHASH C. GOEL- “An Analytical Criterion Bucklyn Strength of Built-up Compresión Menbers” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION- Third Quarter / 1991.
- 3.- FARHANG ASLANI and SUBHASH C: GOEL – “Analytical Criteria for Stitch Strength Of Built-up Compression Members” ENGINEERING JOURNAL / AMERICAN INSTI-TUTE OF STEEL CONSTRUCTION – Third Quarter / 1.992.
- 4.- BLEICH F.- “Buckling Strength of Metal Structures” Mc Grau-Hill Book Company–1.952 pp. 176-179.
- 5.- OMAR MIÑO – “Barras Armadas Reticuladas y Empresilladas”- Nueva Norma Norteamericana y Europea.- FACULTAD DE INGENIERIA DE ROSARIO U.N.R. 2.006.
- 6.- NORMA NORTEAMERICANA AISC-LRFD – 2.005.
- 7.- CHARLES G. SALMON – “Steel Structures, Design Behavior” – PEARSON PRENTICE JOHN E. JOHNSON HALL – ( método LRFD) 2.009.  
FARIS A. MALHAS