



Monografía



El Teorema de Gauss – Bonnet

María Belén Celis, José Abel Semitiel y Natalia Fátima Sgreccia

*Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario*

Disciplina: Matemática

31 de Julio 2002

Secretaría de Ciencia y Técnica
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario
Av. Pellegrini 250 - 2000 Rosario – Argentina
<http://www.fceia.unr.edu.ar/secyt>

Este documento es publicado por la FCEIA para su consulta externa. El mismo se publica como Reporte de Investigación para divulgación de las tareas científicas que se desarrollan en la FCEIA, Universidad Nacional de Rosario. Los autores conservan los derechos de autoría y copia de la totalidad de su trabajo aquí publicado. Luego de su posterior eventual publicación externa a la FCEIA, los requerimientos deberán dirigirse a los autores respectivos. El contenido de este reporte refleja la visión de los autores, quienes se responsabilizan por los datos presentados, los cuales no necesariamente reflejan la visión de la SeCyT-FCEIA. Tanto la SeCyT-FCEIA como los autores del presente reporte no se responsabilizan por el uso que pudiera hacerse de la información y/o metodologías publicadas. Cualquier sugerencia dirigirla a: rtsecyt@fceia.unr.edu.ar

Este trabajo fue presentado en el XI Concurso de Monografías “Luis A. Santaló” organizado por la Unión Matemática Argentina en el año 2002. El mismo obtuvo el primer premio y se encuentra publicado en http://www.union-matematica.org.ar/reunion_anual/anteriores.html

El Teorema de Gauss – Bonnet

María Belén Celis¹, José Abel Semitiel² y
Natalia Fátima Sgreccia³

*Departamento de Matemática
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario*

Resumen

La presente monografía está organizada esencialmente en cinco párrafos. En el primero de ellos se reseña la evolución, a través tanto del tiempo como de distintos pensadores, de las ideas que condujeron al hoy llamado Teorema de Gauss-Bonnet. El objetivo del párrafo dos es la versión local del teorema para lo cual se desarrolla una serie de preliminares necesarios para tal fin. Esta formulación se generaliza en la tercera parte, donde después de introducir conceptos topológicos se llega a la versión global. En el cuarto párrafo se presentan algunas aplicaciones y en el quinto se consignan comentarios finales. Por último se hace una breve reseña biográfica de los autores de dicho teorema.

Palabras clave: topología, geometría diferencial, curvatura de una superficie, característica de Euler-Poincaré.

1 mbcelis@fceia.unr.edu.ar

2 semitiel@fceia.unr.edu.ar

3 sgreccia@fceia.unr.edu.ar

ÍNDICE

Introducción	1
El Teorema Local de Gauss-Bonnet	2
El Teorema Global de Gauss-Bonnet	6
Aplicaciones	10
Comentarios Finales	12
Breve Reseña Biográfica	13
Notas	13
Bibliografía	14

Agradecemos a todos aquéllos que han colaborado con nuestro trabajo de una u otra manera, en especial a los profesores Adolfo Ordóñez, Pedro Marangunic y Carlos Galles, quienes han tenido la buena voluntad de atender nuestras consultas. También debemos en cierto modo agradecer el haber tenido la oportunidad de conocer algo más sobre la labor científica y docente del homenajeado de este año, en especial durante su paso por el Instituto de Matemática de nuestra Facultad.

1. Introducción

El Teorema de Gauss-Bonnet es para muchos el teorema más hermoso y profundo de la Geometría Diferencial de superficies, el cual fue publicado por Bonnet en 1848 referido a una región acotada por una curva simple no geodésica.

El nombre de Gauss ha quedado asociado al teorema porque fue él quien publicó en 1827 un caso especial para triángulos geodésicos (triángulos cuyos lados son arcos de geodésicas de una superficie; ver Fig. 1).

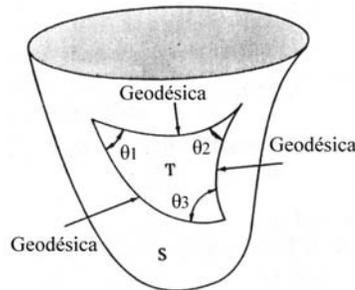


Figura 1

En el mismo afirmaba: $\iint_T K d\sigma = \sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi$ donde θ_i con $i = 1, 2, 3$ son los ángulos interiores de un triángulo geodésico T y K es la curvatura gaussiana sobre T .

Por ejemplo, si $K = 0$ se tiene que $\sum_{i=1}^3 \theta_i = \pi$, una extensión del Teorema de Thales [1] a

superficies de curvatura cero. Además si $K = 1$ se tiene que $\sum_{i=1}^3 \theta_i - \pi = \text{Área}(T) > 0$.

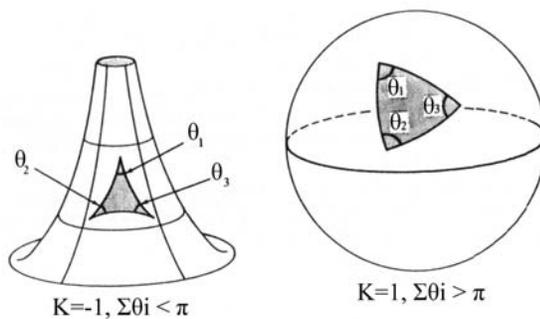


Figura 2

Por lo tanto sobre una esfera unitaria la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es mayor que π y el exceso sobre π es exactamente el área del triángulo T . En cambio, sobre la pseudoesfera la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo geodésico es menor que π (ver Fig. 2).

Por su lado, T. Harriot había probado en 1603 para superficies esféricas, lo que Gauss probaría dos siglos más tarde. Anteriormente a Harriot, Arquímedes (aprox. 250 a.C.) probó un caso especial del teorema: *El área de la superficie de una región de una esfera cortada por un plano es igual al área de un círculo cuyo radio es la distancia desde el punto central de la región a la frontera de la misma*. Interpretando este resultado con el uso de integrales, se puede deducir fácilmente la célebre Fórmula de Gauss-Bonnet.

Sin duda alguna, Arquímedes se restringió a superficies esféricas en forma diferente a Harriot y Gauss, ya que estos últimos consideraban a geodésicas como frontera de la región. Como se ha dicho anteriormente, este resultado fue extendido por Bonnet y para llegar a esta extensión a superficies compactas, entrarán en juego algunas cuestiones topológicas.

Un poco de historia

El caso especial publicado por Gauss está relacionado a una controversia histórica acerca de la posibilidad de demostrar el V Postulado de Euclides (aprox. 300 a.C.), conocido como el Postulado de las Paralelas, del cual se sigue que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es π .

Considerando las geodésicas como líneas rectas, es posible mostrar que las superficies de curvatura constante negativa constituyen un modelo (local) de la Geometría Hiperbólica, donde los postulados de Euclides se satisfacen, excepto el quinto. Esto fue probado en 1868 por Beltrami, en su trabajo “Saggio di interpretazione della geometria non euclidea”.

El Dr. Luis A. Santaló (1911-2001), en su libro “Geometrías no Euclidianas”, comenta que habría sido muy deseable tener una superficie de curvatura constante negativa de extensión infinita la cual fuese un modelo de la Geometría Hiperbólica, pero que Hilbert, en su memoria “Ueber Flächen von Konstanter Gausscher Krümmung” de 1901 demostró que tal superficie no existe en \mathbf{R}^3 . Posteriormente, en 1932, Bieberbach en “Eine singularitätenfreie Fläche Konstanter negativer Krümmung in Hilbertschen Raum” probó que existe en un espacio de infinitas dimensiones.

2. El Teorema Local de Gauss-Bonnet

Comenzaremos con la versión local del Teorema de Gauss - Bonnet (también conocida como la Fórmula de Gauss-Bonnet). Para ello necesitaremos algunas definiciones y lemas.

Definición 2.1.- Se dice que $S \subset \mathbf{R}^3$ es una *superficie regular* si $\forall p \in S$ existe un entorno $V \subset \mathbf{R}^3$ y una correspondencia $\bar{x}: U \rightarrow V \cap S$, donde $U \subset \mathbf{R}^2$ es un abierto, tal que \bar{x} es diferenciable, es un homeomorfismo y es regular [2].

Definición 2.2.- Una curva parametrizada diferenciable $\bar{\alpha}: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ se dice *regular* si $\bar{\alpha}'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Nota 2.1.- Recordemos que una correspondencia continua $\bar{\alpha}: [0, l] \rightarrow \mathbf{R}^3$ es *regular a trozos* si existe una partición $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = l$ de $[0, l]$ tal que $\bar{\alpha}$ es diferenciable y regular en cada $[t_i, t_{i+1}] \quad \forall i = 0, \dots, k$. De ahora en más, cuando trabajemos con una partición será “la mínima posible”, es decir que tomaremos sólo los puntos t_i interiores donde se produzcan irregularidades.

Definición 2.3.- Sea $\bar{\alpha}: [0, l] \rightarrow S$ una correspondencia continua donde S es una superficie regular. Decimos que la curva parametrizada $\bar{\alpha}$ es una *curva modelo* si es cerrada, simple y regular a trozos.

Definición 2.4.- Los puntos $\bar{\alpha}(t_i)$ y las trazas $\bar{\alpha}([t_i, t_{i+1}]) \quad \forall i = 0, \dots, k$, son llamados *vértices* y *arcos regulares* de $\bar{\alpha}$ respectivamente.

Nota 2.2.- Supongamos que la superficie S está orientada, con lo cual queda perfectamente definido el sentido del vector unitario normal \bar{N} . Sea $|\theta_i|$, donde $0 < |\theta_i| \leq \pi$, la determinación más pequeña del ángulo que va desde $\bar{\alpha}'(t_i^-)$ hasta $\bar{\alpha}'(t_i^+)$ [3]. Ver Fig. 3.

Si $|\theta_i| \neq \pi$, le asignamos a θ_i el signo del determinante $(\bar{\alpha}'(t_i^-), \bar{\alpha}'(t_i^+), \bar{N})$.

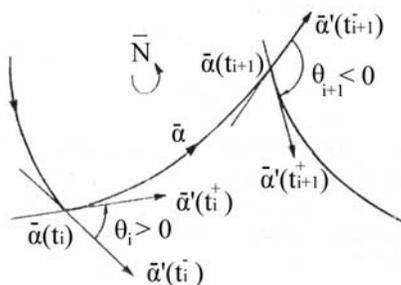


Figura 3

Si $|\theta_i| = \pi$, elegimos el signo de θ_i de la siguiente manera: por la condición de regularidad de $\bar{\alpha}$, $\exists \varepsilon' > 0$ tal que el determinante $(\bar{\alpha}'(t_i - \varepsilon), \bar{\alpha}'(t_i + \varepsilon), \bar{N})$ no cambia de signo cuando $0 < \varepsilon < \varepsilon'$ y por lo tanto le asignamos a θ_i el signo de este determinante (ver Fig. 4).

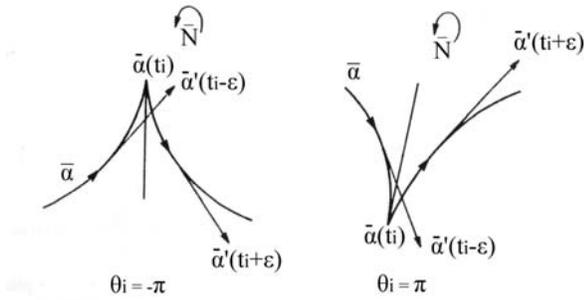


Figura 4

Lema 2.1.- Sea $\bar{x}: U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización compatible [4] con la orientación de S , siendo U homeomórfico a un disco abierto en el plano. Sea $\bar{\alpha}: [0, l] \rightarrow \bar{x}(U) \subset S$ una curva modelo. Sean $\varphi_i: [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbf{R}$ funciones diferenciables, las cuales miden en cada $t \in [t_i, t_{i+1}]$ el ángulo positivo que va desde \bar{x}_u hasta $\bar{\alpha}'(t)$. Entonces, $\sum_{i=0}^k (\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)) + \sum_{i=0}^k \theta_i = \pm 2\pi$ donde el signo positivo o negativo depende de la orientación de $\bar{\alpha}$.

Demostración: Se puede encontrar en el libro de H. Hopf: “Compositio Math 2” (1935) según lo refiere el libro de M. Do Carmo: “Differential Geometry of Curves and Surfaces”.

Definición 2.5.- Sea S una superficie orientada. Una región $R \subset S$ es llamada *simple* si es homeomórfica a un disco y su frontera, contenida en dicha región, es la traza de una curva modelo $\bar{\alpha}$.

Definición 2.6.- Decimos que una curva modelo $\bar{\alpha}: I \rightarrow S$ está *positivamente orientada* si para todo $\bar{\alpha}(t)$ con $t \in I$, la base ortogonal positiva $\{\bar{\alpha}'(t), \bar{h}(t)\}$ satisface la condición de que para cualquier curva $\bar{\beta}: I \rightarrow R$ (R región regular de S) con $\bar{\beta}(0) = \bar{\alpha}(t)$ y $\bar{\beta}'(0) \neq \bar{\alpha}'(t)$, el producto escalar $\bar{\beta}'(0) \times \bar{h}(t) > 0$.

Observación 2.1- Esto significa que si se camina sobre la curva $\bar{\alpha}$ en la dirección positiva y con la cabeza apuntando hacia \bar{N} , la región R permanece a la izquierda. Se puede mostrar que una de las dos orientaciones posibles de $\bar{\alpha}$ la hacen positivamente orientada (ver Fig. 5).

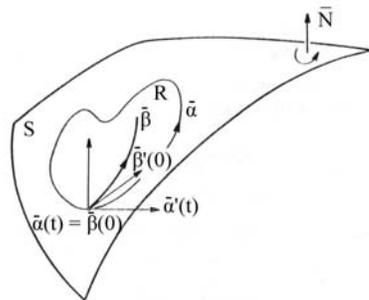


Figura 5

Lema 2.2.- Sea f una función diferenciable sobre una superficie S . Entonces,

$\iint_{\bar{x}^{-1}(R)} f(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv$ no depende de la parametrización \bar{x} (definida como en el Lema 2.1),

donde $E = |\bar{x}_u|^2$, $G = |\bar{x}_v|^2$ y $F = \bar{x}_u \times \bar{x}_v$.

Demostración: Se puede encontrar en el libro ya citado de M. Do Carmo.

Observación 2.2.- La integral del Lema 2.2, llamada integral de f sobre la región R , tiene un significado geométrico y la representamos $\iint_R f d\sigma$.

Lema 2.3.- Sea $\bar{x}: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal [5] de un entorno de una superficie orientada S y $\bar{w} = \bar{w}(t)$ un campo diferenciable de vectores unitarios a lo largo de la curva $\bar{x} = \bar{x}(u(t), v(t))$.

Entonces, [6] $\left[\frac{D\bar{w}}{dt} \right] = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{dt} - E_v \frac{du}{dt} \right) + \frac{d\varphi}{dt}$ donde $\varphi = \varphi(t)$ es el ángulo que va desde \bar{x}_u hasta \bar{w} en la orientación dada.

Demostración: Se puede ver en el libro de M. Do Carmo.

Teorema Local de Gauss-Bonnet.- Sea $\bar{x}: U \rightarrow S$ una parametrización ortogonal de una superficie orientada S donde U es homeomórfico a un disco abierto y \bar{x} es compatible con la orientación de S . Sean $R \subset \bar{x}(U)$ una región simple de S y $\bar{\alpha}: I \rightarrow S$ una curva positivamente orientada, parametrizada por longitud de arco s tal que la frontera de R es $\bar{\alpha}(I)$. Sean $\bar{\alpha}(s_0), \bar{\alpha}(s_1), \dots, \bar{\alpha}(s_k)$ y $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_k$ los vértices y ángulos externos de $\bar{\alpha}$ respectivamente. Entonces,

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$$

donde k_g es la curvatura geodésica de los arcos regulares de $\bar{\alpha}$ y K es la curvatura gaussiana de S .

Demostración: Sea $u = u(s)$ y $v = v(s)$ la expresión de $\bar{\alpha}$ en la parametrización \bar{x} .

Usando el Lema 2.3, tenemos que

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left(G_u \frac{dv}{ds} - E_v \frac{du}{ds} \right) + \frac{d\varphi_i}{ds}$$

donde $\varphi_i = \varphi_i(s) \forall i = 0, \dots, k$ es la del Lema 2.1.

Integrando la expresión anterior en cada intervalo $[s_i, s_{i+1}]$ y sumando los resultados obtenemos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \frac{dv}{ds} - \frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \frac{du}{ds} \right) ds + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds.$$

Convengamos que $\bar{\alpha}(s_{k+1}) = \bar{\alpha}(s_0)$.

Usando el Teorema de Green [7], se sigue que:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds = \iint_{\bar{x}^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv + \sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds.$$

Dado que la parametrización \bar{x} es ortogonal, de la Fórmula de Gauss para $F = 0$ [8], sabemos que:

$$\iint_{\bar{x}^{-1}(R)} \left\{ \left(\frac{E_v}{2\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} \right)_u \right\} du dv = - \iint_{\bar{x}^{-1}(R)} K \sqrt{EG} du dv = - \iint_R K d\sigma.$$

Por otro lado, por el Lema 2.1, tenemos $\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{ds} ds = \sum_{i=0}^k (\varphi_i(s_{i+1}) - \varphi_i(s_i)) = \pm 2\pi - \sum_{i=0}^k \theta_i$.

Como la curva $\bar{\alpha}$ está positivamente orientada, el signo de 2π es positivo y concluimos:

$$\sum_{i=0}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi. \blacksquare$$

Observación 2.3.- La restricción de que la región R esté contenida en el conjunto imagen de una parametrización ortogonal es necesaria solamente para simplificar la demostración. Como veremos luego (Corolario 1) el resultado anterior sigue valiendo para cualquier región simple de una superficie regular.

Observación 2.4.- La Fórmula de Gauss-Bonnet no involucra ninguna parametrización particular.

3. El Teorema Global de Gauss-Bonnet

Para extender el Teorema de Gauss-Bonnet necesitamos algunos conceptos previos.

Definición 3.1.- Sea S una superficie regular. Una región $R \subset S$ se dice *regular* si es compacta y su frontera es la unión finita de curvas modelo, las cuales no se intersecan.

Nota 3.1.- Por conveniencia, consideraremos una superficie compacta como una región regular, cuya frontera es vacía.

Definición 3.2.- Una región simple que tiene sólo tres vértices con ángulos exteriores no nulos se llama *triángulo*.

Definición 3.3.- Una *triangularización* de una región regular R es una familia finita \mathfrak{T} de triángulos T_i con $i = 1, 2, \dots, n$ tal que:

$$i) \bigcup_{i=1}^n T_i = R ;$$

ii) $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ con $i \neq j \Rightarrow T_i \cap T_j$ es un lado en común de T_i y T_j , o bien, es un vértice en común de T_i y T_j .

Definición 3.4.- Dada una triangularización \mathfrak{T} de una región regular R , llamamos T al número de triángulos, L al número de lados y V al número de vértices de la triangularización. El número $\chi = T - L + V$ es llamado la *característica de Euler-Poincaré* [9] de la triangularización \mathfrak{T} .

Las siguientes proposiciones son presentadas sin demostración.

Proposición 3.1.- Toda región regular admite una triangularización.

Proposición 3.2.- Sean S una superficie orientada, $\{\bar{x}_\alpha\}_\alpha$ una familia de parametrizaciones compatible con la orientación de S y $R \subset S$ una región regular. Luego, existe una triangularización \mathfrak{T} de R tal que todo triángulo $T \in \mathfrak{T}$ está contenido en algún entorno correspondiente a la familia $\{\bar{x}_\alpha\}_\alpha$. Además, si la frontera de cada triángulo de \mathfrak{T} está positivamente orientada, entonces triángulos adyacentes determinan orientaciones positivas opuestas en el lado común.

Proposición 3.3.- Sean R una región regular de una superficie orientada S , f una función diferenciable sobre S y \mathfrak{T} una triangularización de R tal que todo triángulo $T_j \in \mathfrak{T}$ con $j = 1, 2, \dots, k$ está contenido en algún entorno $\bar{x}_j(U_j)$ de una familia de parametrizaciones

$\{\bar{x}_\alpha\}_\alpha$ compatible con la orientación de S . Entonces, $\sum_{j=1}^k \iint_{\bar{x}_j^{-1}(T_j)} f(u_j, v_j) \sqrt{E_j G_j - F_j^2} du_j dv_j$ no

depende de la triangularización \mathfrak{T} ni de la familia $\{\bar{x}_j\}$ de parametrizaciones de S .

Observación 3.1.- Véase la analogía entre la Proposición 3.3 y el Lema 2.2.

Proposición 3.4.- Si R es una región regular entonces la característica de Euler-Poincaré no depende de la triangularización de R . Por lo tanto, la denotaremos por $\chi(R)$.

Observación 3.2.- De acuerdo a la Proposición 3.4, la característica de Euler-Poincaré es un invariante topológico de la región R .

Nota 3.2.- Toda superficie compacta $S \subset \mathbf{R}^3$ puede ser considerada como una esfera con una cierta cantidad de mangos. El número de mangos es llamado el *género geométrico* de S y lo denotaremos por g (ver Fig. 6).

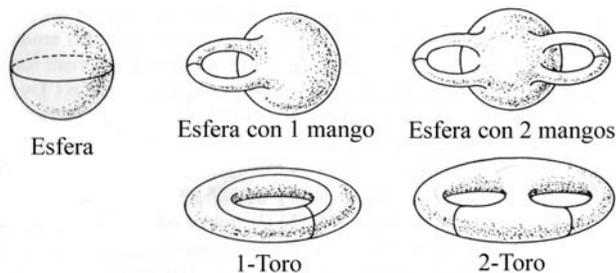


Figura 6

Tomando distintas triangularizaciones, se puede ver que la característica de Euler-Poincaré de la esfera es $\chi = 2$, que la del 1-toro (esfera con un mango) es $\chi = 0$, que la del 2-toro (esfera con dos mangos) es $\chi = -2$ y en general para el g -toro (esfera con g mangos) es $\chi = 2(1 - g)$, de donde se deduce que el género geométrico de S es $g = \frac{2 - \chi}{2}$.

Un argumento válido para esta generalización se encuentra en el libro de R. Millman & G. Parker: “Elements of Differential Geometry”.

De lo anterior, podemos concluir que si S y S' son superficies compactas tales que $\chi(S) = \chi(S')$ entonces son homeomórficas. Ahora estamos en condiciones de demostrar:

Teorema Global de Gauss-Bonnet.- Sean R una región regular de una superficie orientada S , $C_i \forall i = 1, \dots, n$ curvas modelo positivamente orientadas las cuales forman la frontera de R y $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ los ángulos exteriores de las curvas C_i . Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi \chi(R)$$

donde s designa la longitud de arco de C_i y la integral sobre C_i significa la suma de las integrales en cada arco regular de C_i .

Demostración: Consideremos una triangularización \mathfrak{T} de la región R , dada por la Proposición 3.2 (ver Fig. 7).

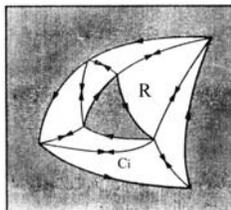


Figura 7

Aplicando el Teorema Local de Gauss-Bonnet a cada triángulo $T_j \in \mathfrak{T}$ con $j = 1, 2, \dots, T$, sumando los resultados, usando la Proposición 3.3 y teniendo en cuenta que cada lado “interior” es recorrido dos veces en orientaciones opuestas, obtenemos:

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{j,k=1}^{T,3} \theta_{jk} = 2\pi T$$

donde $\theta_{j1}, \theta_{j2}, \theta_{j3}$ son los ángulos exteriores del triángulo $T_j \in \mathfrak{T}$.

Sean $\varphi_{jk} = \pi - \theta_{jk}$ los ángulos interiores de cada triángulo T_j . Entonces,

$$\sum_{j,k=1}^{T,3} \theta_{jk} = \sum_{j,k=1}^{T,3} \pi - \sum_{j,k=1}^{T,3} \varphi_{jk} = 3\pi T - \sum_{j,k=1}^{T,3} \varphi_{jk}.$$

Denotaremos L_e al número de lados exteriores de \mathfrak{T} ; L_i al número de lados interiores de \mathfrak{T} ;

V_e al número de vértices exteriores de \mathfrak{T} y V_i al número de vértices interiores de \mathfrak{T} .

Dado que las curvas C_i son cerradas, $L_e = V_e$. Además se demuestra que $3T = 2L_i + L_e$ y relacionándolo con la igualdad anterior obtenemos que

$$\sum_{j,k=1}^{T,3} \theta_{jk} = 2\pi L_i + \pi L_e - \sum_{j,k=1}^{T,3} \varphi_{jk}.$$

Observemos que los vértices exteriores pueden ser vértices de alguna curva C_i , o bien vértices introducidos por la triangularización. Establecemos $V_e = V_{e1} + V_{e2}$, donde V_{e1} es el número de vértices de las curvas C_i y V_{e2} es el número de vértices exteriores de la triangularización que no son vértices de ninguna curva C_i .

Dado que la suma de los ángulos alrededor de cada vértice interior es 2π , obtenemos:

$$\sum_{j,k=1}^{T,3} \theta_{jk} = 2\pi L_i + \pi L_e - 2\pi V_i - \pi V_{e2} - \sum_{i=1}^p (\pi - \theta_i).$$

Sumando y restando πL_e a la expresión anterior y teniendo en cuenta que $L_e = V_e$, obtenemos que

$$\sum_{j,k=1}^{T,3} \theta_{jk} = 2\pi L_i + 2\pi L_e - 2\pi V_i - \pi V_e - \pi V_{e2} - \pi V_{e1} + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi L - 2\pi V + \sum_{i=1}^p \theta_i$$

donde $L = L_i + L_e$ y $V = V_i + V_e$ son el número de lados y vértices de \mathfrak{T} respectivamente.

Finalmente, concluimos que

$$\sum_{i=1}^n \int_{C_i} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=1}^p \theta_i = 2\pi(T - L + V) = 2\pi \chi(R). \blacksquare$$

Veamos algunas consecuencias directas que se deducen a partir de este resultado.

Dado que una región simple $R \subset S$ tiene característica $\chi(R)=1$, tenemos que:

Corolario 1.- Si R es una región simple de S entonces $\sum_{i=1}^k \int_{s_i}^{s_{i+1}} k_g(s) ds + \iint_R K d\sigma + \sum_{i=0}^k \theta_i = 2\pi$.

Considerando la Nota 3.1 obtenemos que:

Corolario 2.- Sea S una superficie compacta orientable entonces $\iint_S K d\sigma = 2\pi \chi(S)$.

Nota 3.3.- Por la Nota 3.2 sabemos que toda superficie puede ser considerada como una esfera con una cierta cantidad de mangos y que superficies homeomórficas tienen la misma característica de Euler-Poincaré. La importancia del Corolario 2 se debe a que la integral $\iint_S K d\sigma$ varía solamente según la cantidad de mangos de la esfera.

4. Aplicaciones

4.1. *Una superficie compacta de curvatura positiva es homeomórfica a una esfera.*

La característica de Euler-Poincaré de una tal superficie es positiva y la esfera es la única superficie compacta de \mathbf{R}^3 que satisface esta condición.

4.2. *Sea S una superficie orientable de curvatura $K \leq 0$. Luego, dos geodésicas Γ_1 y Γ_2 que comienzan en un punto $p \in S$ no pueden volver a encontrarse en un punto $q \in S$ de tal manera que las trazas de Γ_1 y Γ_2 constituyan la frontera de una región simple $R \subset S$.*

Supongamos que ocurre lo contrario. Por el Corolario 1, $\iint_R K d\sigma + \theta_1 + \theta_2 = 2\pi$ donde θ_1 y

θ_2 son los ángulos exteriores de la región R . Dado que las geodésicas Γ_1 y Γ_2 no pueden ser mutuamente tangentes, tenemos que $\theta_i < \pi$ con $i = 1, 2$.

Como por hipótesis $K \leq 0$, esto implica que $\iint_R K d\sigma \leq 0$, pero por lo anterior $\iint_R K d\sigma > 0$, lo cual nos lleva a una contradicción.

Cuando $\theta_1 = \theta_2 = 0$, las trazas de las geodésicas Γ_1 y Γ_2 constituyen una sola geodésica cerrada simple de S . Se sigue que sobre una superficie de curvatura $K \leq 0$, no existe una geodésica simple cerrada que sea frontera de una región simple cerrada $R \subset S$.

4.3. *Sea S una superficie homeomórfica a un cilindro con curvatura $K < 0$. Entonces S contiene a lo más una geodésica simple cerrada.*

Supongamos que S contiene una geodésica simple cerrada Γ . Por la Aplicación 4.2., y dado que existe un homeomorfismo φ de S con un plano α menos un punto $q \in \alpha$, $\varphi(\Gamma)$ es la

frontera de una región simple de α que contiene al punto q . Supongamos ahora que S contiene otra geodésica simple cerrada Γ' tal que no se interseca con Γ . Además los arcos de $\varphi(\Gamma)$ y $\varphi(\Gamma')$ entre dos puntos de intersección consecutivos, r_1 y r_2 , podrían ser la frontera de una región simple, contradiciendo la Aplicación 4.2 (ver Fig. 8).

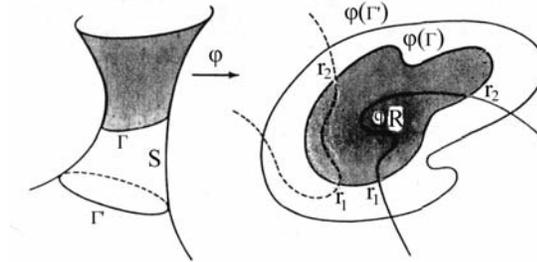


Figura 8

Por el argumento anterior, $\varphi(\Gamma')$ es nuevamente la frontera de una región simple $R \subset \alpha$ que contiene a q , cuyo interior es homeomórfico a un cilindro.

Por lo tanto, $\chi(R) = 0$ y por el Teorema de Gauss-Bonnet, $\iint_{\varphi^{-1}(R)} K \, d\sigma = 2\pi \chi(R) = 0$, lo cual es

una contradicción por ser $K < 0$.

4.4. Si existen dos geodésicas simples cerradas Γ_1 y Γ_2 sobre una superficie compacta S de curvatura $K > 0$ entonces $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

Por la Aplicación 4.1, S es homeomórfica a una esfera. Si Γ_1 y Γ_2 no se intersecan, entonces el conjunto formado por estas geodésicas es la frontera de una región R , cuya característica de Euler-Poincaré es $\chi(R) = 0$.

Por el Teorema de Gauss-Bonnet, $\iint_R K \, d\sigma = 0$, lo cual es una contradicción ya que $K > 0$.

4.5. Sea T un triángulo geodésico sobre una superficie orientada S . Sean θ_1 , θ_2 y θ_3 los ángulos exteriores de T y $\varphi_i = \pi - \theta_i$ con $i = 1, 2, 3$, sus ángulos interiores.

Se sigue que: i) $K = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \varphi_i = \pi$;

ii) $K < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \varphi_i < \pi$;

iii) $K > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^3 \varphi_i > \pi$.

Por el Corolario 1, $\iint_T K \, d\sigma + \sum_{i=1}^3 \theta_i = 2\pi$.

Por lo tanto, $\iint_{\Gamma} K d\sigma = 2\pi - \sum_{i=1}^3 (\pi - \varphi_i) = -\pi + \sum_{i=1}^3 \varphi_i$ de donde se sigue el enunciado (ver analogía de *iii*) con la Introducción).

4.6. El Teorema de Poincaré: *La suma de los índices de un campo vectorial diferenciable \bar{v} con puntos singulares aislados sobre una superficie compacta S es la característica de Euler-Poincaré de S . Esto es, $\sum_{i=1}^k I_i = \chi(S)$ donde I_i es el índice de \bar{v} en un punto singular aislado $p_i \in S$.*

Este resultado se puede ver en detalle en el libro de M. Do Carmo.

4.7. Aplicaciones en la Física.

Dentro de esta disciplina y en relación a la distribución de la materia y la energía en el Universo, las fuerzas pueden ser consideradas como curvaturas. Esto permite aplicar el Teorema de Gauss-Bonnet en la demostración de distintos resultados físicos.

Por ejemplo, entre una serie de teoremas acerca de singularidades y agujeros negros en el espacio – tiempo curvo de la Teoría de la Relatividad de Einstein [10], en el libro de Hawking-Ellis: “The large scale structure of space-time”, se utiliza el Teorema de Gauss-Bonnet para demostrar la Proposición 9.3.2 de dicha obra.

También, en el libro editado por A. Held: “General Relativity and Gravitation” puede verse el artículo “The Positive Mass Conjeture” de Dieter R Brill - Pong Soo Jang donde se aplica el Teorema de Gauss-Bonnet.

Por otra parte, generalizaciones del Teorema han sido aplicadas a supervariedades diferenciables que se utilizan en la Teoría de la Supergravedad, esto se puede ver en el artículo “From Gravity to Supergravity” de S. Deser, que figura en el mismo libro de A. Held.

5. Comentarios Finales

Uno de los hechos más importantes del Teorema es que pone en evidencia una relación notable entre la topología de una superficie compacta y la integral de su curvatura, quedando íntimamente ligadas la Topología y la Geometría. Esto es tan sólo un ejemplo más de las múltiples interrelaciones existentes entre las distintas áreas de la matemática, ya que ninguna de ellas permanece aislada.

Otro rasgo trascendente es la evolución del Teorema de Thales para superficies de curvatura cero al caso especial publicado por Gauss para triángulos geodésicos, y de este último al

Teorema de Gauss-Bonnet. Este pasaje de un resultado particular a uno general es en cierto modo la fortaleza de la Matemática.

6. Breve Reseña Biográfica



JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Ducado de Brunswick (actualmente Alemania). Fue Director del Observatorio Astronómico de Gottinga, desde 1807 hasta su muerte. Es uno de los científicos más grande de la historia; combina en su obra la fertilidad y la especial originalidad de los matemáticos del siglo XVIII con el espíritu crítico de los tiempos modernos. Sus campos de actividad se extienden desde la teoría de números a las funciones de variable compleja, y desde la mecánica celeste al telégrafo eléctrico, del cual es uno de los inventores. Uno de sus intereses fundamentales fue la Geometría Diferencial y publicó varios trabajos en este tópico. Su obra fundamental escrita en latín, como la mayoría de sus trabajos, sobre la teoría de superficies fue “Disquisitiones generales circa superficies curvas” de 1828 en el cual se encontraba el famoso Teorema Egregio. Gauss publicó otros trabajos sobre cuestiones de geometría, pero mantuvo inéditas algunas de sus ideas más atrevidas, en especial las referentes a la geometría no euclideana. Parece ser que él fue el primero en creer en la independencia del postulado de las paralelas, de manera que aceptaba la posibilidad lógica de una geometría en la que este postulado fuese sustituido por otro. Creía que la verdadera geometría del espacio podría determinarse por medio de experimentos, con lo que se oponía a uno de los principios fundamentales de la filosofía kantiana que prevalecía en su tiempo. Murió el 23 de febrero de 1855 en Gottinga, Hanover (actualmente Alemania).



PIERRE OSSIAN BONNET nació el 22 de diciembre de 1819 en Montpellier, Francia. Entre sus dos publicaciones sobre la convergencia de series a términos positivos había empezado su trabajo en el área de la Geometría Diferencial en 1844, donde hizo un importante aporte. Una de sus mayores contribuciones fue introducir la noción de curvatura geodésica.

Además publicó sobre cartografía, álgebra, mecánica racional y física. Murió el 22 de junio de 1892 en París, Francia.

7. Notas

[1] Thales de Mileto (aprox. 585 a.C.)

[2] $\forall q \in U$, el diferencial $d\bar{x}_q : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ es biyectivo

[3] $\bar{\alpha}'(t_i^-) \neq 0$ y $\bar{\alpha}'(t_i^+) \neq 0$ por la condición de regularidad de $\bar{\alpha}$

[4] El sentido del vector $\bar{x}_u \wedge \bar{x}_v$ es igual al sentido del vector normal a la superficie S.

[5] $F = \bar{x}_u \times \bar{x}_v = 0$

[6] Denotamos por $\left[\frac{D\bar{w}}{dt} \right]$ a la derivada covariante de \bar{w} respecto a t

[7] George Green (1793-1841)

$$[8] K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}$$

[9] Leonhard Euler (1707-1783) - Jules-Henri Poincaré (1854-1912)

[10] Albert Einstein (1879-1955)

8. Bibliografía

- Boyer C., 1996. *Historia de la Matemática*, Alianza, Madrid.
- Collete J., 1986. *Historia de las Matemáticas II*, Siglo Veintiuno Editores, México D.F.
- Do Carmo M., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, New Jersey.
- Fuster, R. & Giménez, I., 1995. *Variable Compleja y Ecuaciones Diferenciales*, Reverté, Barcelona.
- Hawking, S. & Ellis, G., 1973. *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Londres.
- Held, A., 1980. *General Relativity and Gravitation*, Vol. 1, Plenum Press, Nueva York.
- Kreyszig, E., 1959. *Differential Geometry*, University of Toronto Press, Toronto.
- Lipschutz, M., 1969. *Theory and Problems of Differential Geometry*, Schaum's Outline Series of Mc. Graw- Hill Book Company, New York.
- Millman, R. & Parker, G., 1977. *Elementes of Differential Geometry*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. & Trejo, C., 1958. *Análisis Matemático*, Vol.2, Kapelusz, Buenos Aires.
- Santaló, L., 1961. *Geometrías no Euclidianas*, Editorial Universitaria de Buenos Aires, Buenos Aires.
- Struik, D., 1955. *Geometría Diferencial Clásica*, Aguilar, Madrid.