Facultad de
Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura

FCEIA

UNR

Universidad
Nacional
de Rosario

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

Curso Introductorio

INTRODUCCIÓN A LA MATEMÁTICA

Introcaso, Beatriz
Rodil, Florencia
Sibuet, Flavia Muriel
Verona, Melina Carla
Con la colaboración de Caraballo, Lucía

Introducción a la Matemática: Curso Introductorio / Beatriz Introcaso ... [et al.] - 1a ed. - Rosario : Editorial
Asociación de Profesores de la Facultad de Ciencias Exactas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Rosario, 2024.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3662-57-7

1. Educación Superior. 2. Matemática. 3. Educación Secundaria.
CDD 510.711

Título:
Introducción a la Matemática

Edición Nº1

ISBN 978-987-3662-57-7

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento a los docentes que, con su dedicación y profesionalismo, desempeñan una labor clave en la transición entre el nivel secundario y el universitario. Su trabajo va más allá de la enseñanza de contenidos, ya que contribuyen al desarrollo integral de los estudiantes, apoyándolos en su adaptación a los nuevos desafíos académicos.

Asimismo, agradecemos profundamente a aquellos docentes que han colaborado con sus comentarios, críticas y correcciones durante la elaboración de este material. Sus aportes han sido fundamentales para mejorar y perfeccionar este trabajo, y su disposición para compartir su experiencia y conocimientos ha sido de gran ayuda.

Este libro se ha enriquecido gracias a su colaboración, y valoramos enormemente el tiempo y el esfuerzo que han dedicado a este proceso.

Índice

Naturales, enteros y fracciones

Tabla de contenidos

1. Números naturales y números enteros

El conjunto de los **números naturales** es: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 120, 121, \ldots\}$

Observamos que:

- existe un primer número natural, el 1
- no existe un último número natural (los puntos suspensivos al final del listado indican que esta secuencia continúa indefinidamente)
- existe el siguiente de cada número natural
- entre dos números naturales consecutivos no existe ningún otro número natural

El conjunto de los **números naturales con el cero** es: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 120, 121, \ldots\}$

Observamos que:

- existe un primer número natural con el cero, el 0
- no existe un último número natural con el cero
- entre dos números naturales con el cero consecutivos no existe ningún otro número natural con el cero

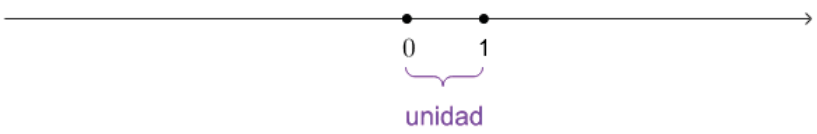
El conjunto de los **números enteros** es: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -121, -120, \ldots, -3, -2, -1, 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ 120,\ 121, \ldots\}$

Observamos que:

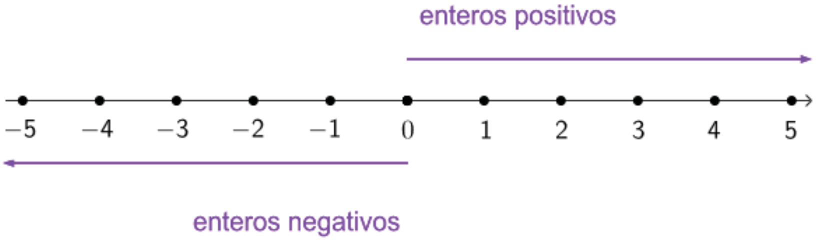
- no existe ni un primer ni un último número entero
- existe el siguiente de cada número entero
- entre dos números enteros consecutivos no existe ningún otro número entero

Representación de números naturales y de números enteros en la recta numérica

Una recta numérica es una recta en la cual se seleccionan dos puntos arbitrarios, al punto de la izquierda se asocia el número cero y al de la derecha el número uno. La distancia entre ambos puntos representa la unidad.



Trasladando la unidad hacia la derecha de 1 obtenemos puntos que representan a los números naturales (o los números enteros positivos) $2, 3, 4, 5 \ldots$ y trasladando la unidad hacia la izquierda de cero obtenemos puntos que representan a los números enteros negativos $\ldots, -5, -4, -3, -2, -1$



De esta manera, cada número entero queda asociado a un punto de la recta.

1.1. Múltiplos y divisores de un número natural

Múltiplos de un número natural

Los **múltiplos** de un número natural n $(n \in \mathbb{N}_0)$ son los números que se obtienen de multiplicar a n por los otros naturales o cero. Al conjunto de los múltiplos de n se lo indica: M_n

Nota: el símbolo "$\in$" indica que n es un elemento del conjunto $\mathbb{N}_0$

Ejemplos:

Escribe un número natural o cero (menor o igual a 250) y luego presiona enter: 1

Los primeros 10 múltiplos de 1 son:

$1 . 0 = 0$	$1 . 1 = 1$	$1 . 2 = 2$	$1 . 3 = 3$	$1 . 4 = 4$
$1 . 5 = 5$	$1 . 6 = 6$	$1 . 7 = 7$	$1 . 8 = 8$	$1 . 9 = 9$

$$M_1 = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9; \ldots\}$$

https://www.geogebra.org/m/gqxrnqtm

Notar que:

- El cero tiene solamente un múltiplo, el mismo cero.
- El cero es múltiplo de todos los números.
- Todos los números son múltiplos de 1.
- Todo número es múltiplo de sí mismo.
- Todo número natural tiene una cantidad infinita de múltiplos.

Divisores de un número natural

Los **divisores** de un número $n \in \mathbb{N}$ son los números naturales que dividen a n de manera exacta (la división entera tiene resto cero). Al conjunto de los divisores de n se lo indica: D_n

Ejemplos:

Escribe un número natural (menor o igual a 250) y luego presiona enter: 1

El conjunto de los divisores de 1 es:

$D_1 = \{1\}$

https://www.geogebra.org/m/gqxrnqtm

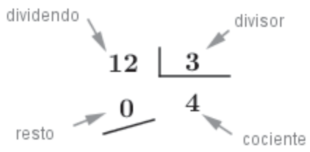
Notar que:

- El cero tiene infinitos divisores pues todos los números naturales son divisores de cero.
- El 1 es divisor de todos los números.
- El 1 tiene solamente un divisor, el mismo uno.
- Todo número distinto de cero es divisor de sí mismo.
- Todo número, excepto el cero y el 1, tiene al menos dos divisores: al 1 y a sí mismo.
- Todo número natural tiene una cantidad finita (una cantidad que tiene fin) de divisores.

"Un número natural o cero p es múltiplo de otro número natural n, si n es un divisor de p"

Ejemplo:

12 es *múltiplo* de 3 pues 3 es un divisor de 12. En efecto: $12 : 3 = 4$



Otras formas de indicar lo mismo:

3 *divide* a 12

3 es factor 12

12 es divisible por 3

Nota: el concepto de múltiplos y divisores puede extenderse a los números enteros.

1.2. Criterios de divisibilidad

Los **criterios de divisibilidad** nos permiten saber, sin necesidad de hacer la división, si un número es divisible por otro.

Algunos criterios de divisibilidad:

- Un número es divisible por 2 si termina en 0, 2, 4, 6 o en 8
- Un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3
- Un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4
- Un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5
- Un número es divisible por 6 si es divisible por 2 y por 3
- Un número es divisible por 8 si el número formado por sus tres últimas cifras es múltiplo de 8
- Un número es divisible por 9 si la suma de sus cifras es múltiplo de 9
- Un número es divisible por 10 si termina en 0.

1.3. Números pares e impares

Los números naturales pueden clasificarse en **pares** e **impares**.

Números pares

Un número natural es **par** si es múltiplo de 2. Eso significa que al multiplicar un número natural (o cero) por 2 obtendremos un número par. De este modo, podemos caracterizar los números pares como:

$$x\ es\ par \Leftrightarrow\ x = 2.n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Nota: El símbolo "$\Leftrightarrow$" entre dos proposiciones indica que son **equivalentes**: "Proposición A $\Leftrightarrow$ Proposición B" significa que si se verifica la Proposición A, entonces se verifica la Proposición B, a la vez que si se verifica la Proposición B entonces se verifica la Proposición A. En este caso si $x\ es\ par$ entonces x se puede escribir como el doble de un número natural, y a la vez si x es el doble de un número natural entonces x es par. Podemos expresar esto afirmando que el hecho de ser x par es *necesario* para que x sea el doble de un número natural, y a la vez que x sea par es *suficiente* para que se pueda escribir como el doble de un número natural. Por eso se suele decir que una de las proposiciones es ***condición necesaria y suficiente*** para la otra.

Ejemplo:

8 es par puesto que $8 = 2 \cdot 4$, siendo $4 \in \mathbb{N}_0$

Números impares

Todo número natural que no sea múltiplo de 2 es **impar**. Una caracterización de los impares es:

$$x\ es\ impar \Leftrightarrow\ x = 2.n + 1,\ n \in \mathbb{N}_0$$

Ejemplo:

9 es impar puesto que $9 = 2 \cdot 4 + 1$, siendo $4 \in \mathbb{N}_0$

Nota: el concepto de par e impar puede extenderse a los números enteros.

1.4. Primos y compuestos

Números primos

Un número natural es **primo** cuando admite *exactamente* dos divisores.

Ejemplos:

1) 7 es primo pues tiene exactamente dos divisores: el 1 y el 7.

2) 13 es primo pues tiene exactamente dos divisores: el 1 y el 13.

Números compuestos

Un número natural es **compuesto** si admite más de dos divisores.

Ejemplos:

1) 4 es compuesto pues tiene más de dos divisores: el 1, 2 y 4.

2) 12 es compuesto pues tiene más de dos divisores: el 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Nota 1: El cero y el uno no son ni primos ni compuestos.

Nota 2: el concepto de primo y compuesto puede extenderse a los números enteros.

1.5. Descomposición factorial

La **descomposición factorial** de un número natural consiste en expresar al número como producto de sus factores primos.

Ejemplo:

La descomposición factorial de 60 es: $60 = 2^2.3.5$

1.6. Múltiplo común menor y Divisor común mayor

Múltiplo común menor (m.c.m.)

El **múltiplo común menor** o **mínimo común múltiplo** de varios números naturales es el número natural (sin considerar al 0) más pequeño que es múltiplo de todos esos números.

Cálculo del m.c.m.

Para calcular el m.c.m. de dos o más números:

1º) descomponemos los números en factores primos.

2º) multiplicamos los factores comunes y no comunes en las descomposiciones anteriores, elevados a su mayor exponente.

Ejemplo:

Para obtener el m.c.m. entre 36 y 60

1º) Descomponemos ambos números en sus factores primos:

$36 = 2^2 . 3^2$ $\qquad$ $60 = 2^2 . 3 . 5$

2º) $m.c.m. (36, 60) = 2^2 . 3^2 . 5 = 180$

Divisor común mayor (d.c.m.)

El **divisor común mayor** o **máximo común divisor** de varios números es el número natural más grande que es divisor de todos esos números.

Cálculo del d.c.m

Para calcular el d.c.m de dos o más números:

1º) descomponemos los números en factores primos.

2º) multiplicamos solamente los factores comunes elevados al exponente menor.

Ejemplo:

Para obtener el d.c.m entre 36 y 60

1º) Descomponemos ambos números en sus factores primos:

$36 = 2^2 . 3^2$ $\qquad$ $60 = 2^2 . 3 . 5$

2º) $d.c.m(36, 60) = 2^2 . 3 = 12$

1.7. Práctica 1

1) Completar cada espacio con una cifra para que el número resultante cumpla con lo pedido (*puede haber más de una opción correcta*).

949__ es múltiplo de 2
1__9345 es múltiplo de 3
1111__ es múltiplo de 4
12__ es divisible por 3
4__2 es divisible por 4
9935__ es múltiplo de 5
4__ __ es divisible por 3 y 5
43__ es múltiplo de 6
22__ es divisible por 2 y 3
472__ es múltiplo de 8
27__4 es múltiplo de 9
__2__ es divisible por 6

2) Escribir todos los números primos entre 1 y 25.

3) Escribir los primeros 10 números compuestos mayores a 15.

4) Escribir lo pedido en cada caso.

a) El número 24 como suma de dos números primos.
b) Cuatro números primos consecutivos mayores que 50 y menores que 70.
c) Dos números compuestos consecutivos mayores que 13 y menores que 18.
d) El número 39 como suma de dos números compuestos.

5) Unir cada frase de la primera columna con la o las que le correspondan en la segunda.

Si la última cifra de un número es 5, entonces	es múltiplo de 4
Si un número es par, entonces	es múltiplo de 5
Si un número es múltiplo de 9, entonces	uno de sus divisores es 2
Si la última cifra de un número es 0, entonces	uno de sus divisores es 3

6) Sin efectuar la división, determinar si los siguientes números son divisibles por 18. Justificar.

a) 300
b) 1053
c) 306

7) Teniendo en cuenta que $42 \cdot 25 = 1050$, ¿Cuáles de los siguientes números son divisores 1050? Justificar cada elección y cada descarte.

a) 42
b) 25
c) 6
d) 7
e) 21
f) 35

8) Encontrar tres números que tengan al 46 como divisor común y otros tres que lo tengan como múltiplo. ¿Hay una única respuesta en cada caso?

9) Hallar el MCM y el DCM para los siguientes números:

a) 24 y 96
b) 35 y 12
c) 27, 45 y 18
d) 60, 108 y 36

2. Operaciones con números enteros

Trabajaremos con la suma, resta, multiplicación y división de números enteros.

2.1. Valor absoluto de un número entero

Valor absoluto de un número entero

Definición

$$|a| = \begin{cases} a & si & a \geq 0 \\ -a & si & a < 0 \end{cases}$$ siendo a un número entero

Nota: el número $-a$ es el *opuesto de* a, por ejemplo, si $a = 7$ será $-a = -7$; si $a = -3$ será $-a = -(-3) = 3$; si $a = 0$ será $-a = 0$

Ejemplos:

a) $|4| = 4$ pues $4 > 0$
b) $|-9| = -(-9) = 9$ pues $-9 < 0$

Propiedades del valor absoluto

1. $\forall a \in \mathbb{Z}, |a| \geq 0$
2. $\forall a \in \mathbb{Z}, |a| = |-a|$

Nota: El símbolo "$\forall$" indica que la proposición es válida ***cualquiera sea*** el número $a \in \mathbb{Z}$ que se considere.

Distancia entre dos puntos

El concepto de valor absoluto permite definir la distancia entre dos puntos cualesquiera de la recta numérica.

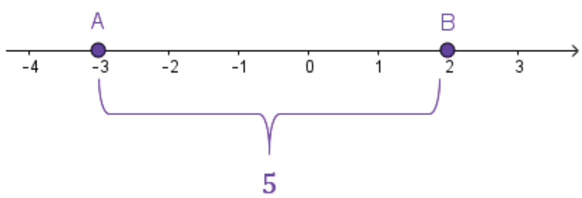
Definición

Sean A y B los puntos que representan a los números a y b respectivamente. La distancia entre A y B, que simbolizamos $d(A, B)$, es el valor absoluto de la diferencia entre los números a y b.
En símbolos: $d(A, B) = |a - b|$

Observación: En particular, si O es el origen de coordenadas, la distancia entre el punto A y el origen es: $d(A, O) = |a - 0| = |a|$

Ejemplo:

Sea A el punto que representa al número -3 y B el punto que representa al número 2. La distancia entre A y B es:
$d(A, B) = |-3 - 2| = |-5| = 5$

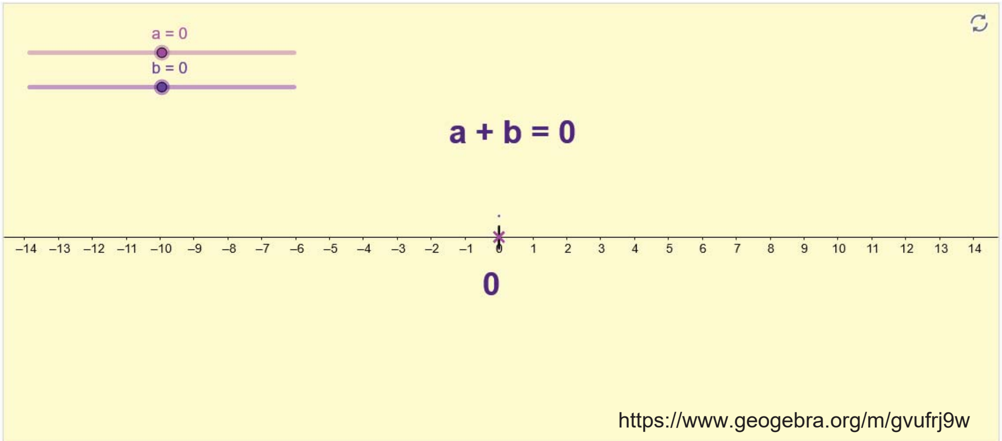


2.2. Suma y resta de números enteros

Suma de números enteros

Interpretación gráfica de la suma de dos números enteros

Al arrastrar los deslizadores a y b obtendrás dos números enteros entre -7 y 7 y verás una interpretación gráfica de su suma: nos situamos en el punto que representa el primer sumando a y, a partir de este punto, nos desplazamos tantas unidades como indique el segundo sumando b hacia la derecha o la izquierda dependiendo si b es positivo o negativo, respectivamente, el punto en el cual quedemos situados corresponderá a la suma entre a y b.



Procedimiento algebraico para la suma de dos números enteros

- **Para sumar dos enteros con el mismo signo**: hallar la suma de sus valores absolutos, acompañando la suma con el signo de los sumandos.

Ejemplo:

$$(+5) + (+3) = +(|+5| + |+3|) = +8$$
$$(-5) + (-3) = -(|-5| + |-3|) = -8$$

- **Para sumar dos enteros con diferente signo**: hallar la diferencia entre el mayor y el menor de los valores absolutos, acompañando el resultado con el signo del entero que tiene mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$(-5) + (+3) = -(|-5| - |+3|) = -2$$
$$(+5) + (-3) = +(|+5| - |-3|) = +2$$

Resta de números enteros

Para realizar la resta de dos números enteros se debe sumar al minuendo el opuesto del sustraendo.

Ejemplos:

$$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +(|+5| - |-3|) = +2$$
$$(-5) - (-3) = (-5) + (+3) = -(|-5| - |+3|) = -2$$
$$(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -(|-5| + |-3|) = -8$$
$$(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +(|+5| + |+3|) = +8$$

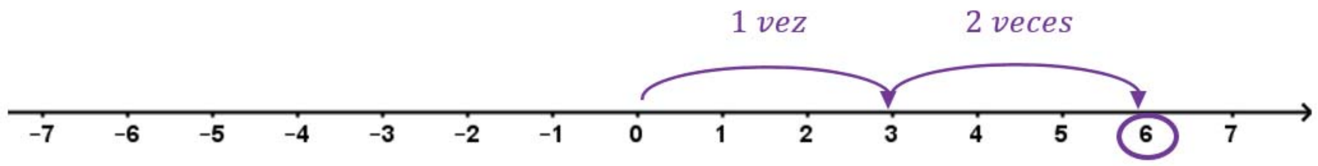
2.3. Multiplicación y división de números enteros

Multiplicación de números enteros

Interpretación gráfica de la multiplicación de dos números enteros

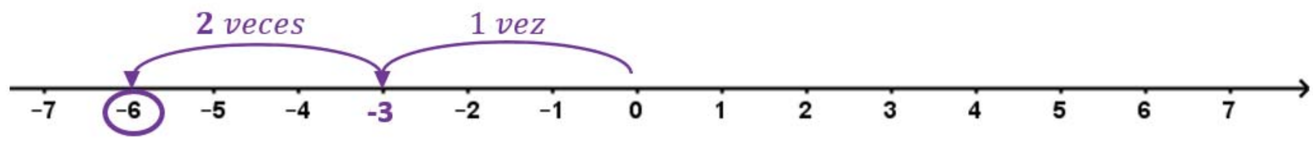
Vamos a comprender la multiplicación de números enteros a partir de la definición de multiplicación de números naturales que todos conocemos: multiplicar dos números naturales consiste en sumar uno de los factores consigo mismo tantas veces como indica el otro factor.

Queremos calcular el producto $(+3) \cdot (+2)$, donde $+3$ y $+2$ son los factores.
Lo que debemos hacer es sumar $+3$ dos veces consigo mismo.



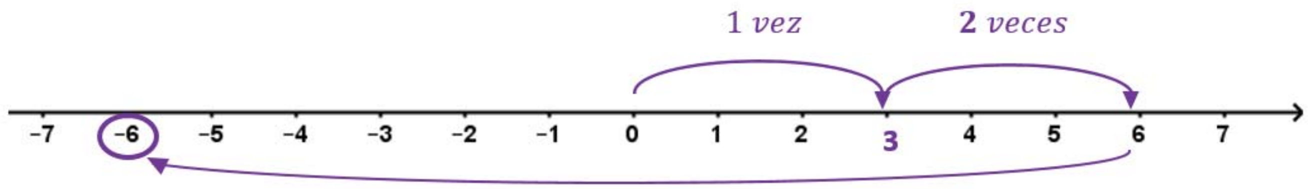
Es decir: $(+3) \cdot (+2) = (+3) + (+3) = +6$

Queremos calcular el producto $(-3) \cdot (+2)$, donde -3 y $+2$ son los factores.
Lo que debemos hacer es sumar -3 dos veces consigo mismo.



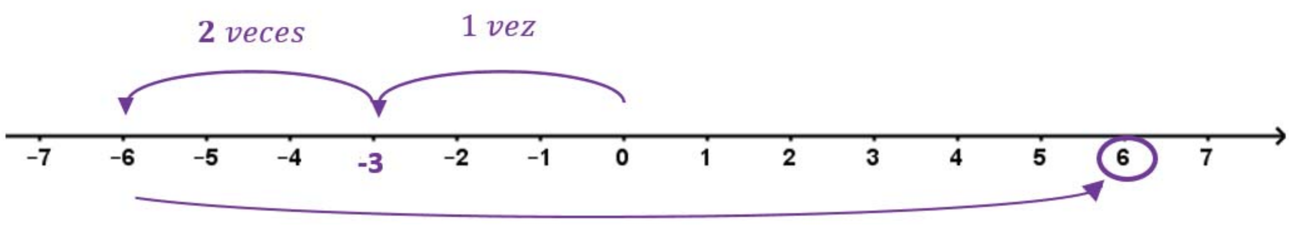
Es decir: $(-3) \cdot (+2) = (-3) + (-3) = -6$

Ahora queremos calcular el producto $(+3) \cdot (-2)$, donde $+3$ y -2 son los factores. ¿Cómo podemos multiplicar un número negativo de veces al $+3$? Lo que debemos hacer en este caso es multiplicar $+3$ por $+2$ y luego cambiar el signo del producto.



De este modo: $(+3) \cdot (-2) = -6$

Por último, queremos calcular el producto $(-3) \cdot (-2)$, donde -3 y -2 son los factores. Lo que debemos hacer en este caso es multiplicar -3 por $+2$ y luego cambiar el signo del producto.



De este modo: $(-3) \cdot (-2) = +6$

Procedimiento algebraico para la multiplicación de dos números enteros

- **Para multiplicar dos números enteros con igual signo**: se multiplican sus valores absolutos y el signo del producto será positivo.

Ejemplos:

$$(+3) \cdot (+5) = +15$$
$$(-3) \cdot (-5) = +15$$

- **Para multiplicar dos números enteros con distinto signo**: se multiplican sus valores absolutos y el signo del producto será negativo.

Ejemplos:

$$(+3) \cdot (-5) = -15$$
$$(-3) \cdot (+5) = -15$$

División de números enteros

- **Para dividir dos números enteros con igual signo**: se dividen sus valores absolutos y el signo del cociente será positivo.

Ejemplos:

$$(+15) : (+5) = +3$$
$$(-15) : (-5) = +3$$

- **Para dividir dos números enteros con distinto signo**: se dividen sus valores absolutos y el signo del cociente será negativo.

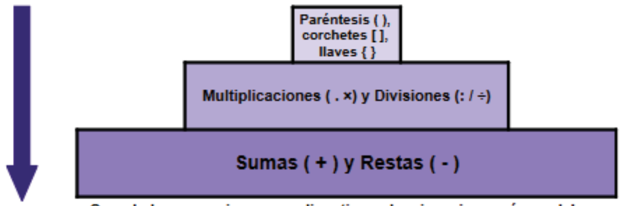
Ejemplos:

$$(+15) : (-5) = -3$$
$$(-15) : (+5) = -3$$

Regla de los signos para el producto y el cociente

Producto Cociente	+	-
+	+	-
-	-	+

2.4. Jerarquía de las operaciones



Cuando las operaciones a realizar tienen la misma jerarquía, se deben resolver de izquierda a derecha

Ejemplos:

Resolver las siguientes operaciones combinadas.

a) Sin signos de agrupación: se separan los términos atendiendo a los signos $+$ y $-$, se resuelven las operaciones dentro de cada término, finalmente, se realizan las sumas y restas.

$\overbrace{8\cdot 5:2}+\overbrace{5}+\overbrace{9:3}-\overbrace{8\cdot 4:2}=$ $\leftarrow$ separar en términos

$=\overbrace{40:2}+\overbrace{5}+\overbrace{3}-\overbrace{32:2}=$ $\leftarrow$ resolver las operaciones en cada término

$=\overbrace{20}+\overbrace{5}+\overbrace{3}-\overbrace{16}=$

$=\overbrace{25}+\overbrace{3}-\overbrace{16}=$ $\leftarrow$ resolver las sumas y restas, de izquierda a derecha

$=\overbrace{28}-\overbrace{16}=$

$=\overbrace{12}$

b) Con signos de agrupación: primero se resuelven las operaciones entre paréntesis $()$, luego las operaciones entre corchetes $[\,]$ y, por último, las operaciones entre llaves $\{\}$. Teniendo siempre presente que, dentro de cada signo de agrupación, debemos separar en términos y respetar la jerarquía de las operaciones.

$=\{[9-3\cdot(\overbrace{5}-\overbrace{2\cdot 4}+\overbrace{2})-4]:[3\cdot 4-5\cdot(\overbrace{8}-\overbrace{6})]\}+(\overbrace{-1}-\overbrace{6})=$ $\leftarrow$ resolver las operaciones dentro de los paréntesis

$=\{[9-3\cdot(\overbrace{5}-\overbrace{8}+\overbrace{2})-4]:[3\cdot 4-5\cdot 2]\}+(-7)=$

$=\{[9-3\cdot(\overbrace{-3}+\overbrace{2})-4]:[3\cdot 4-5\cdot 2]\}+(-7)=$

$=\{[\overbrace{9}-\overbrace{3\cdot(-1)}-\overbrace{4}]:[\overbrace{3\cdot 4}-\overbrace{5\cdot 2}]\}+(-7)=$ $\leftarrow$ resolver las operaciones dentro de los corchetes

$=\{[\overbrace{9}-\overbrace{(-3)}-\overbrace{4}]:[\overbrace{12}-\overbrace{10}]\}+(-7)=$

$=\{8:2\}+(-7)=$ $\leftarrow$ resolver las operaciones dentro de las llaves

$=4+(-7)=\leftarrow$ resolver las sumas y/o restas

$=-3$

2.5. Práctica 2

1) Completar con $<$, $>$ o $=$.

a) $|-15|\ldots\ldots-15$
b) $|15|\ldots\ldots 15$
c) $|4+5|\ldots\ldots|4|+|5|$
d) $|-4+5|\ldots\ldots|-4|+|5|$
e) $|7-12|\ldots\ldots|7|-|12|$
f) $-|-4|-|-8|\ldots\ldots-|-4-(-8)|$

2) Expresar en lenguaje simbólico y resolver.

a) La suma entre ocho y menos diez
b) La diferencia entre cinco y doce
c) El siguiente de menos dos
d) El valor absoluto de menos siete
e) El producto entre menos cinco y ocho
f) El anterior de menos nueve
g) El cociente entre veinte y menos cuatro
h) La diferencia entre seis y menos tres
i) El valor absoluto del siguiente de menos nueve
j) La mitad del consecuente de sesenta y cinco
k) El triple del anterior de cuarenta y cinco
l) La tercera parte del siguiente de menos cuarenta
m) La suma entre el anterior de ocho y el siguiente de menos treinta
n) El producto entre tres y el siguiente de menos quince

3) Expresar en lenguaje simbólico.

a) El siguiente de un número
b) La suma de dos números consecutivos
c) Un número par
d) Un número impar
e) El anterior de un número
f) Un múltiplo de tres
g) La mitad de un número
h) La tercera parte de un número
i) El triple del consecutivo de un número
j) La cuarta parte del anterior de un número
k) El anterior de la cuarta parte de un número
l) El siguiente del doble de un número

4) Calcular.

a) $3-[-5\cdot 6-4\cdot(12:4-5\cdot 2)-24:3]$
b) $8-24:(-1-5)+(-20:4+7)\cdot(-7)$
c) $-10+(9\cdot 3-6\cdot 5)\cdot 6+(-15+6)$
d) $(14-8\cdot 3):(9-11)+100:(-8-2)$
e) $(2+3\cdot(-4))\cdot 2+18:(2-4\cdot 2)$
f) $-6\cdot(7-12)+15\cdot(1-20:4)-(-13)$
g) $12\cdot(-3):(-4)+(-5+7\cdot 2)\cdot(-3)+9$
h) $-15:(-7+12)\cdot(-12+8\cdot 2)-(5-11)\cdot(-3)$
i) $(9\cdot 3-6\cdot 6+8)\cdot 3+(-15\cdot 3:(-5)-16)\cdot 4$
j) $[(1+7\cdot 3)\cdot 3+6]:(-4)+114:(-19+65:5)$
k) $-36\cdot 5:(-9\cdot(-5))+54:(11-4\cdot 5)+7$

3. Fracciones

En la vida cotidiana se nos presentan situaciones como, por ejemplo dividir una soga de 3 metros en 5 partes iguales, que resolvemos sin mayores dificultades. La longitud de cada una de las partes obtenidas es el número que resulta de dividir 3 entre 5. Si llamamos x a dicha longitud será $x = 3 : 5$, es decir, x es un número que multiplicado por 5 da 3. Claramente, no existe ningún número entero que verifique esto; sin embargo, existe otro tipo de número, la fracción $\frac{3}{5}$ que multiplicada por 5 da 3.

En general, decimos que una **fracción** es un cociente (o razón) entre dos números enteros. Esto es: $\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0$

El número p es el **numerador** de la fracción y el número q es su **denominador**.

Una fracción se dice **propia** cuando el numerador es menor que el denominador.

Una fracción se dice **impropia** cuando el numerador es mayor que el denominador. Este tipo de fracciones se pueden expresar como **número mixto** (un número entero acompañado de una fracción propia).

Ejemplos:

1) $\frac{1}{2}$ es una fracción propia pues $1 < 2$

2) $\frac{3}{2}$ es una fracción impropia pues $3 > 2$

Su expresión como número mixto es $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2} \leftarrow$ "*un entero y un medio*".

Para obtener esta representación hacemos la división $3 : 2$ cuyo cociente entero es 1 y resto 1.

Generalizando, si $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$, p es el dividendo, q el divisor, c el cociente y r el resto, se verifica: $\frac{p}{q} = c + \frac{r}{q}$

Representación de fracciones en la recta numérica

Ya vimos cómo se representan los números enteros en la recta numérica. Para representar fracciones en la recta numérica procederemos de la siguiente forma:

1º) Dividir la unidad en tantos segmentos iguales como indique el denominador.

2º) A partir del cero, hacia la derecha si la fracción es positiva o hacia la izquierda en caso contrario, nos movemos tantas partes como indique el numerador. El punto así hallado será el punto representativo de la fracción.

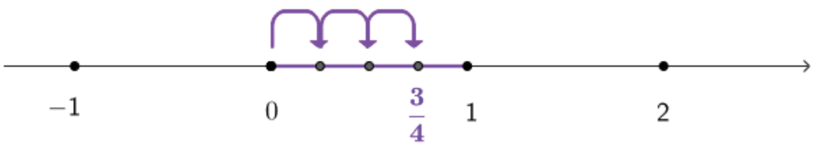
De esta manera, cada fracción queda asociada con un punto de la recta.

Ejemplos:

1) Representar en la recta numérica $\frac{3}{4}$.

1º) Dividir la unidad en 4 partes iguales.

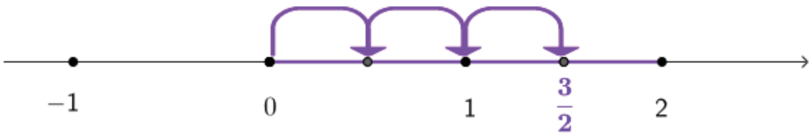
2º) Desde el cero y hacia la derecha tomar 3 partes.



2) Representar en la recta numérica $\frac{3}{2}$.

1º) Dividir la unidad en 2 partes iguales. Notar que la fracción es impropia por lo que admite una representación en forma de número mixto: $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. De este modo, lo que interesa dividir es el segmento que tiene por extremos los puntos que representan al 1 y al 2

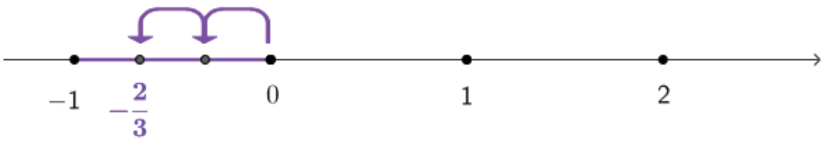
2º) Desde el cero y hacia la derecha tomar 3 partes.

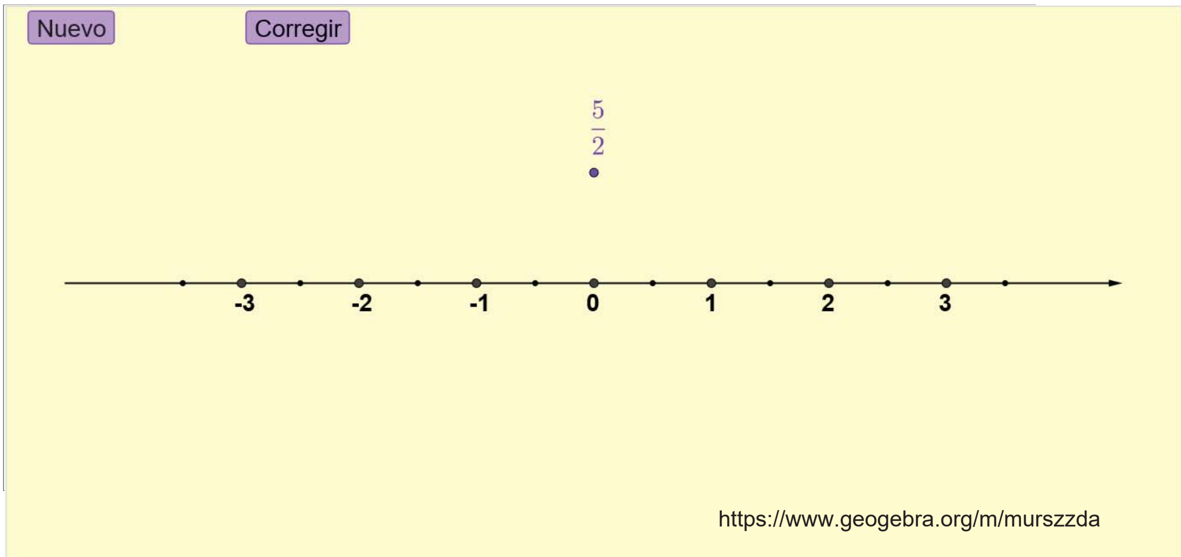


3) Representar en la recta numérica $-\frac{2}{3}$.

1º) Dividir la unidad en 3 partes iguales. Notar que la fracción es negativa por lo que interesa dividir el segmento que tiene por extremos a los puntos que representan al -1 y al 0.

2º) Desde el cero y hacia la izquierda tomar 2 partes.



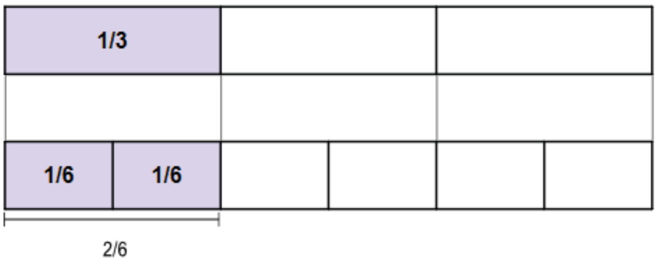


3.1. Fracciones equivalentes

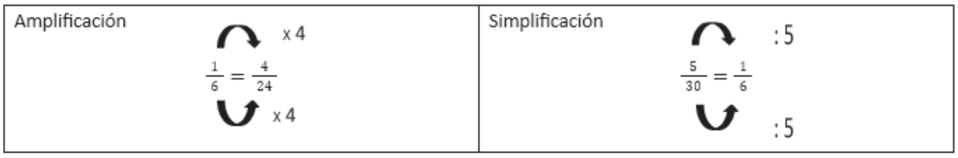
Dos fracciones son **equivalentes** si representan la misma cantidad.

Ejemplo:

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$



Para obtener una fracción equivalente a otra fracción dada, multiplicamos (**amplificación**) o, si es posible, dividimos (**simplificación**) el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número entero distinto de cero.



Cuando el divisor común mayor entre el numerador y el denominador de una fracción es 1, la fracción no se puede simplificar, en este caso decimos que la fracción es **irreducible**.

Ejemplo:

$\frac{1}{2}$ es una fracción irreducible.

Ejemplo:

Calcular el valor de p para que las fracciones $\frac{2}{3}$ y $\frac{p}{12}$ resulten equivalentes. Esto es:

Buscamos $p \in \mathbb{Z}$ para el cual $\frac{2}{3} = \frac{p}{12}$

Primero debemos encontrar cuál es el número entero cuyo producto con 3 es 12, luego p será el producto entre 2 y el número hallado.

$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{4} = \frac{8}{12}$

A partir del concepto de fracciones equivalentes, la **igualdad** entre dos fracciones se define de la siguiente forma:

$$\boxed{\frac{p}{q} = \frac{r}{s} \text{ si y sólo si } p \cdot s = q \cdot r}$$

Ejemplo:

Calcular el valor de t para que las fracciones $\frac{7}{4}$ y $\frac{t}{20}$ resulten equivalentes. Esto es:

Buscamos $t \in \mathbb{Z}$ para el cual $\frac{7}{4} = \frac{t}{20}$

Teniendo en cuenta la definición de igualdad de fracciones.

$$\frac{7}{4} = \frac{t}{20} \Leftrightarrow 7 \cdot 20 = 4 \cdot t$$

$$\frac{7 \cdot 20}{4} = t$$

$$35 = t$$

3.2. Fracciones y decimales

Expresión decimal de los números racionales: pasaje de fracción a decimal

En toda fracción, al dividir el numerador por el denominador, obtenemos una expresión decimal finita o infinita periódica.

Ejemplo:

Para obtener la expresión decimal correspondiente a la fracción $\frac{6}{5}$ dividimos 6 por 5 obteniendo el cociente $1,2$. Es decir: $\frac{6}{5} = 1,2$

Expresión fraccionaria de números racionales: pasaje de expresión decimal a fracción

Por supuesto que también es posible hacer el camino inverso, es decir, partiendo de una expresión decimal finita o infinita periódica obtener una fracción. Para esto procederemos según se ilustra en los tres ejemplos siguientes:

a) **Si la expresión decimal es finita**:

Sea $a = 3,2$ entonces:

$$10a = 32$$

Con lo que $a = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$

Vemos que este procedimiento mostrado se reduce al siguiente: se multiplica y divide el número por una potencia de diez donde el exponente será igual al número de cifras que encontremos después de la coma:

$$3,2 = 3,2 \cdot \frac{10^1}{10^1} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

b) **Si la expresión decimal es periódica**, podemos encontrarnos con alguno de los dos siguientes casos:

b.1) Periódica pura: el período aparece inmediatamente después de la coma.

Sea $a = 2,\hat{7} = 2,777\ldots$ entonces:

$$10a = 27,\hat{7} = 27,777\ldots$$

Así
$$\begin{array}{rrcl} 10a = & 27,\hat{7} & = & 27,777\ldots \\ a = & 2,\hat{7} & = & 2,777\ldots \\ \hline 9a = & 25 & & \end{array}$$

Con lo que $a = \frac{25}{9}$

Vemos que este procedimiento mostrado se reduce al siguiente: el numerador será la diferencia entre el número dado (sin la coma y tomando sólo una vez el período) y la parte entera y el denominador constará de tantos nueves como cifras tenga el período:

$$a = 2,\hat{7} = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9}$$

b.2) Periódica mixta (o semiperiódica): después de la coma encontramos algunas cifras no periódicas y luego el período.

Sea $a = 1,4\hat{2} = 1,4222\ldots$ entonces:

$$10a = 14,\hat{2} = 14,222\ldots$$

$$100a = 142,\hat{2} = 142,222\ldots$$

Así
$$\begin{array}{rlcl} 100a = & 142,\hat{2} & = & 142,222\ldots \\ 10a = & 14,\hat{2} & = & 14,222\ldots \\ \hline 90a = & 128 & & \end{array}$$

con lo cual $a = \dfrac{128}{90} = \dfrac{64}{45}$

Vemos que este procedimiento mostrado se reduce al siguiente: el numerador será la diferencia entre el número dado (sin la coma y tomando sólo una vez el período) y el determinado por la parte entera y la parte no periódica y el denominador constará de tantos nueves como cifras tenga el período seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica:

$$a = 1,4\hat{2} = \frac{142 - 14}{90} = \frac{128}{90} = \frac{64}{45}$$

3.3. Comparación y orden de fracciones

Comparación de fracciones

Dadas dos fracciones muchas veces es necesario compararlas, es decir, saber cuál de las dos fracciones es mayor o menor que la otra.

Es posible comparar fracciones a partir de:

- Sus representaciones gráficas: la fracción cuyo punto representativo en la recta numérica está a la izquierda es menor.
- Sus expresiones decimales.
- La búsqueda de fracciones equivalentes.

Veremos con más detalles esta última forma.

Comparación de fracciones utilizando fracciones equivalentes

- ### Fracciones con igual denominador

De dos fracciones que tienen el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador.

Ejemplos

a) $\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ porque teniendo igual denominador, el número 4, la relación de orden entre los numeradores es $3 < 5$

b) $-\frac{3}{4} > -\frac{5}{4}$ porque teniendo igual denominador, el número 4, la relación de orden entre los numeradores es $-3 > -5$

- ### Fracciones con igual numerador

De dos fracciones que tienen el mismo numerador es menor la que tiene mayor denominador.

Ejemplos

a) $\frac{3}{4} < \frac{3}{2}$ porque teniendo igual numerador, el número 3, la relación de orden entre los denominadores es $4 > 2$

b) $-\frac{3}{4} > -\frac{3}{2}$ porque teniendo igual numerador, el número 3, la relación de orden entre los denominadores es $-4 < -2$

- ### Fracciones con numeradores y denominadores distintos

Para poder comparar fracciones con distinto numerador y denominador debemos encontrar las fracciones equivalentes con común denominador. Será menor la fracción que tenga menor numerador.

Ejemplos

a) Comparar las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{4}{7}$.

1.- Buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. Notar que es conveniente que el nuevo denominador sea el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones originales.

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$$

$$\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

2.- Comparar las fracciones obtenidas para determinar la relación de orden entre las fracciones originales

$$\frac{2}{5} = \frac{14}{35} < \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{4}{7}$$

<u>Nota</u>: el símbolo "$\Rightarrow$" significa *entonces*: si vale la proposición de la izquierda *entonces* vale la de la derecha.

b) Comparar las fracciones $-\frac{2}{5}$ y $-\frac{4}{7}$.

1.- Buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador. Notar que es conveniente que el nuevo denominador sea el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones originales.

$$-\frac{2}{5}=-\frac{14}{35}$$

$$-\frac{4}{7}=-\frac{20}{35}$$

2.- Comparar las fracciones obtenidas para determinar la relación de orden entre las fracciones originales

$$-\frac{2}{5}=-\frac{14}{35}>-\frac{20}{35}=-\frac{4}{7}\Rightarrow-\frac{2}{5}>-\frac{4}{7}$$

Orden de fracciones

Para ordenar más de dos fracciones podemos hacer uso de los mismos métodos.

3.4. Práctica 3

1) En cada caso, decidir si las dos fracciones son equivalentes. Justificar.

a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$

b) $\frac{4}{3}$ y $\frac{16}{9}$

c) -4 y $\frac{-12}{3}$

d) $\frac{-2}{3}$ y $\frac{4}{-6}$

e) 7 y $\frac{2}{14}$

f) $\frac{8}{21}$ y $\frac{2}{7}$

2) Completar los espacios para que las fracciones sean equivalentes.

a) $\frac{3}{9} = \frac{\quad}{18} = \frac{15}{\quad}$

b) $\frac{15}{2} = \frac{\quad}{10} = \frac{30}{\quad}$

c) $\frac{28}{16} = \frac{7}{\quad} = \frac{\quad}{12}$

d) $\frac{20}{-8} = \frac{-5}{\quad} = \frac{\quad}{12}$

e) $\frac{-48}{3} = \frac{\quad}{4} = \frac{-16}{\quad}$

f) $\frac{7}{9} = \frac{14}{\quad} = \frac{\quad}{45}$

3) Transformar en fracciones equivalentes de igual denominador y colocar $<$ o $>$ según corresponda.

a) $\frac{5}{6} = \ldots\ldots$ y $\frac{7}{8} = \ldots\ldots \implies \frac{5}{6} \ldots\ldots \frac{7}{8}$

b) $\frac{9}{4} = \ldots\ldots$ y $\frac{11}{6} = \ldots\ldots \implies \frac{9}{4} \ldots\ldots \frac{11}{6}$

c) $-\frac{3}{5} = \ldots\ldots$ y $-\frac{2}{3} = \ldots\ldots \implies -\frac{3}{5} \ldots\ldots -\frac{2}{3}$

d) $-\frac{5}{2} = \ldots\ldots$ y $-\frac{16}{7} = \ldots\ldots \implies -\frac{5}{2} \ldots\ldots -\frac{16}{7}$

4) Colocar $<$, $>$ o $=$ según corresponda.

a) $1,223 \ldots\ldots 1,2223$

b) $\dfrac{37}{15} \ldots\ldots 2,46$

c) $\dfrac{3}{16} \ldots\ldots 0,187$

d) $\dfrac{3}{16} \ldots\ldots 0,1875$

e) $\dfrac{1}{3} \ldots\ldots 0,3333$

f) $0,9 \ldots\ldots 0,90$

g) $\dfrac{45}{6250} \ldots\ldots 0,007\hat{2}$

h) $\dfrac{2}{3} \ldots\ldots 0,666667$

i) $1 \ldots\ldots 0,\hat{9}$

5) Transformar en expresiones decimales y colocar < o > según corresponda.

a) $\dfrac{4}{5} = \ldots\ldots$ y $\dfrac{9}{10} = \ldots\ldots \Longrightarrow \dfrac{4}{5} \ldots\ldots \dfrac{9}{10}$

b) $-\dfrac{5}{6} = \ldots\ldots$ y $-\dfrac{17}{20} = \ldots\ldots \Longrightarrow -\dfrac{5}{6} \ldots\ldots -\dfrac{17}{20}$

c) $\dfrac{14}{3} = \ldots\ldots$ y $\dfrac{21}{5} = \ldots\ldots \Longrightarrow \dfrac{14}{3} \ldots\ldots \dfrac{21}{5}$

d) $-\dfrac{20}{9} = \ldots\ldots$ y $-\dfrac{11}{5} = \ldots\ldots \Longrightarrow -\dfrac{20}{9} \ldots\ldots -\dfrac{11}{5}$

6) Completar con fracciones que cumplan las siguientes condiciones.

a) $0 < \ldots\ldots < \dfrac{2}{3} < \ldots\ldots < 1$

b) $\dfrac{5}{3} < \ldots\ldots < 2 < \ldots\ldots < \dfrac{5}{2}$

c) $-\dfrac{4}{3} < \ldots\ldots < -1 < \ldots\ldots < -\dfrac{2}{3}$

d) $-\dfrac{8}{5} < \ldots\ldots < -\dfrac{7}{5} < \ldots\ldots < -\dfrac{6}{5}$

e) $\dfrac{10}{13} < \ldots\ldots < \dfrac{11}{13} < \ldots\ldots < \dfrac{12}{13}$

f) $-\dfrac{3}{7} < \ldots\ldots < -\dfrac{2}{7} < \ldots\ldots < -\dfrac{1}{7}$

7) En cada caso, escribir la fracción equivalente irreducible.

a) $\dfrac{15}{50} =$

b) $\dfrac{180}{63} =$

c) $1\dfrac{26}{39} =$

d) $-\dfrac{45}{100} =$

e) $0,6 =$

f) $-2,35 =$

g) $1,22 =$

h) $0,255 =$

i) $0,\hat{2} =$

j) $1,\widehat{62} =$

k) $32,3\hat{1} =$

l) $0,\widehat{271} =$

4. Operaciones con fracciones

A continuación trabajaremos con la suma, resta, multiplicación y división de fracciones. Además, haremos una revisión de porcentajes.

4.1. Suma y resta de fracciones

- Con igual denominador

Suma con igual denominador

Ejemplo:

$$\frac{7}{15} + \frac{5}{15} = \frac{12}{15}$$

Resta con igual denominador

Ejemplo:

$$\frac{7}{15} - \frac{5}{15} = \frac{2}{15}$$

Para sumar o restar fracciones con igual denominador sumamos o restamos, según corresponda, los numeradores y mantenemos el mismo denominador.

- Con distinto denominador

Suma con distinto denominador

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Resta con distinto denominador

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Para sumar o restar fracciones con distinto denominador primero buscamos fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador y luego sumamos o restamos, según corresponda, los numeradores y manteniendo el denominador común.

4.2. Multiplicación y división de fracciones

Multiplicación de fracciones

El producto de dos o más fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores.

Ejemplos:

a) $\frac{5}{3}.\frac{2}{7}=\frac{5.2}{3.7}=\frac{10}{21}$

b) $5.\frac{2}{7}=\frac{5}{1}.\frac{2}{7}=\frac{5.2}{1.7}=\frac{10}{7}$

Para multiplicar un número entero por una fracción, multiplicamos el número por el numerador y mantenemos el mismo denominador.

En la multiplicación de fracciones es posible simplificar antes de realizar la operación de multiplicación.

Ejemplo:

$\frac{10}{3}.\frac{5}{4}=\frac{5}{3}.\frac{5}{2}=\frac{5.5}{3.2}=\frac{25}{6}$

División de fracciones

Para dividir dos fracciones multiplicamos a la primera de ellas por el recíproco de la segunda.

Nota: El recíproco de $\frac{p}{q}$ es $\frac{q}{p}$

Ejemplos:

1) $\frac{5}{3}:\frac{2}{7}=\frac{5}{3}.\frac{7}{2}=\frac{5.7}{3.2}=\frac{35}{6}$

2) $5:\frac{2}{7}=5.\frac{7}{2}=\frac{5}{1}.\frac{7}{2}=\frac{5.7}{1.2}=\frac{35}{2}$

4.3. Fracción de una cantidad

Para calcular una fracción de una cantidad se multiplica esa cantidad por la fracción correspondiente.

Ejemplos:

a) La tercera parte **de** treinta y seis:

$$36.\frac{1}{3} = 12$$

b) Las tres cuartas partes **de** doscientos:

$$200.\frac{3}{4} = 150$$

c) Los dos quintos **de** siete tercios:

$$\frac{2}{5}.\frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

4.4. Práctica 4

1) Calcular

a) $\frac{3}{2}-\frac{16}{15}\cdot\frac{5}{24}+\frac{5}{3}$

b) $3-\left(-\frac{1}{4}\right)+7\cdot(-5)+\frac{15}{4}$

c) $\frac{6}{5}-\frac{37}{3}:(4\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+1)+\frac{1}{10}$

d) $\frac{9}{8}:\frac{27}{4}+(0,75\cdot\frac{8}{5}-0,3)$

e) $\frac{2}{3}-\left[\frac{1}{6}+2-\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{1}{5}\cdot\left(5\cdot\frac{1}{2}-\frac{7}{3}\right)$

f) $\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\right]:\left[\left(\frac{2}{5}+1\right)\cdot\frac{3}{2}\right]$

g) $-\left[-3-(6-9)\,.\,0,1\hat{5}\right]$

h) $\dfrac{3-\dfrac{5-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{10}}}{2-\frac{1}{2}}$

i) $\left(\frac{1}{3}+\dfrac{1}{2-\frac{1}{5}}\right):3+\frac{1}{3}$

j) $(2,5-\frac{7}{6}:\frac{14}{15})\cdot 0,64+\frac{8}{9}$

2) Responder

a) ¿Qué fracción del día duerme una persona que duerme 8 horas?
b) ¿Qué fracción de un siglo son 40 años?
c) ¿Qué fracción, del total de letras de la palabra, representa la cantidad de vocales en la palabra MURCIÉLAGO?
d) ¿Cuántos octavos hay en 2 enteros?

3) La cuarta parte de un camino es de tierra, las dos quintas partes, de empedrado y el resto de asfalto.

a) ¿Qué parte del camino está asfaltado?
b) ¿Cuál de las tres partes del camino es mayor?
c) ¿Está asfaltado más de la mitad del camino?

Si el camino tuviera $140\ km$:

d) ¿Cuántos km serían empedrados?
e) ¿Cuántos de tierra?
f) ¿y de asfalto?

4) Hector prepara 1 litro de pintura mezclando $\frac{4}{5}$ de color blanco con $\frac{1}{5}$ de color negro. Como no le gustó el tono logrado, agregó a la mezcla 1 litro de color blanco. ¿Qué parte de cada color tiene la nueva mezcla?

5) Carlos compró un pedazo de queso que pesaba $\frac{3}{4}$ de kilo. Si lo partió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilo, ¿en cuántas porciones lo partió?

5. Proporcionalidad directa e inversa: Regla de tres simple

Proporcionalidad directa

Dos magnitudes x e y son **directamente proporcionales** cuando existe una constante k, llamada constante de proporcionalidad directa, de modo que $y = k \cdot x$ para todo par de valores x e y que se correspondan.

Ejemplo:

Si dividimos la masa de una muestra de hierro por su volumen, el resultado será el mismo que el obtenido al dividir la masa de cualquier otra muestra por su volumen, dicho cociente corresponde a la constante de proporcionalidad conocida, en este caso, como densidad del hierro.

En la siguiente tabla se muestra la masa (en gramos) y el volumen (en cm^3) de diferentes trozos de hierro y el cociente entre ambas magnitudes.

masa (g)	$31,2$	$46,8$	$62,4$	78	$109,2$
volumen (cm^3)	4	6	8	10	14
densidad=masa/volumen (g/cm^3)	$7,8$	$7,8$	$7,8$	$7,8$	$7,8$

Notar que al aumentar la masa el volumen también aumenta en la misma proporción. Por ejemplo, si la masa se duplica el volumen también se duplica.

Proporcionalidad inversa

Dos magnitudes son **inversamente proporcionales** cuando existe una constante k, llamada constante de proporcionalidad inversa, de modo que $x \cdot y = k$ para todo par de valores x e y que se correspondan.

Ejemplo:

Si viajamos en línea recta desde una ciudad A y a otra ciudad B y multiplicamos el módulo de la velocidad media de conducción por el tiempo de viaje obtenemos la distancia recorrida.

En la siguiente tabla se muestra el módulo de la velocidad media (en km/h) y el tiempo (en h) de diferentes viaje entre las ciudades A y B y el producto entre ambas magnitudes.

velocidad (km/h)	60	50	30	20
tiempo (h)	5	6	10	15
distancia=velocidad . tiempo (km)	300	300	300	300

Notar que al aumentar la velocidad el tiempo disminuye en la misma proporción. Por ejemplo, si la velocidad se triplica el tiempo se reduce a la tercera parte.

Regla de tres simple: directa o inversa

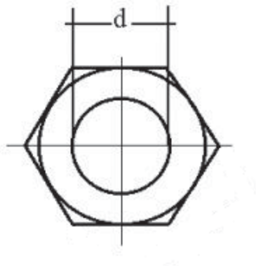
Cuando se conocen tres de los cuatro valores de dos pares proporcionales, la regla de tres permite calcular el valor desconocido.

Regla de tres simple directa

Se usa para calcular el valor de una magnitud conocidos los otros tres valores en una relación de proporcionalidad directa.

Ejemplo:

En un plano de una tuerca realizado a escala $1:100$ se sabe que $1\ cm$ en el dibujo se corresponde con $100\ cm$ de la realidad. Si en el plano la medida del diámetro de caña d es de $0,45\ cm$, ¿cuál de el diámetro de caña real de la tuerca?



Escribimos los tres datos en una tabla, cada magnitud en su columna correspondiente:

Medida en el dibujo	**Medida en la realidad**
$1\ cm$	$100\ cm$
$0,45\ cm$	d

$$d = \frac{0,45\ cm \cdot 100\ cm}{1\ cm} = 45\ cm$$

Procedimiento general

Se colocan en una tabla los 3 valores conocidos (a_1, a_2 y b_1) y la incógnita, es decir, el valor que queremos averiguar (x) cuidando que cada magnitud quede en la columna correspondiente. Después, se aplica la siguiente fórmula:

Magnitud A	**Magnitud** B
a_1	b_1
a_2	x

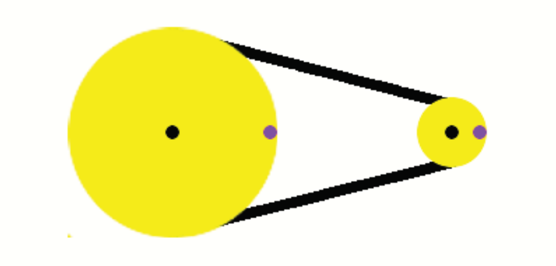
$$\Rightarrow \quad x = \frac{a_2 \cdot b_1}{a_1}$$

Regla de tres simple inversa

Se usa para calcular el valor de una magnitud conocidos los otros tres valores en una relación de proporcionalidad inversa.

Ejemplo:

Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La de la derecha tiene un radio de $25\ cm$ y la de la izquierda de $75\ cm$. Cuando la de menor radio ha dado 300 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá dado la de mayor radio?



Escribimos los tres datos en una tabla, cada magnitud en su columna correspondiente:

Radio	**Vueltas**
$25\ cm$	300
$75\ cm$	x

$$x = \frac{25\ cm \cdot 300 vueltas}{75\ cm} = 100 vueltas$$

Procedimiento general

Se colocan en una tabla los 3 valores conocidos (a_1, a_2 y b_1) y la incógnita, es decir, el valor que queremos averiguar (x) cuidando que cada magnitud quede en la columna correspondiente. Después, se aplica la siguiente fórmula:

Magnitud A		**Magnitud** B	
a_1	————————	b_1	
			$\Rightarrow \quad x = \dfrac{a_1 \cdot b_1}{a_2}$
a_2	————————	x	

5.1. Práctica 5

1) Indicar si los siguientes pares de magnitudes son directa o inversamente proporcionales.

a) La cantidad de personas que realizan un trabajo (suponiendo que todos trabajan al mismo ritmo), con respecto al tiempo que tardan en realizarlo.

b) La cantidad de personas que ponen plata para comprar un regalo de un monto fijo (suponiendo que todos ponen lo mismo), con respecto al dinero que pone cada uno.

c) La superficie de la pared con respecto al tiempo empleado para pintarla.

d) El tiempo que dura una provisión de comida, respecto a la cantidad de personas que comen de esa provisión.

e) El tiempo que se tarde en ir de Rosario a Santa Fe, con respecto a la velocidad con la que se viaja.

f) El tiempo que se tarda en ahorrar una suma fija, con respecto a la cantidad de dinero que se ahorra por día (suponiendo que todos los días se ahorra la misma cantidad).

g) La cantidad de máquinas nacesarias para hacer un trabajo, respecto del tiempo que se tarda para hacerlo.

h) La superficie de pasto que se corta en un terreno acotado, respecto del tiempo que se necesita para cortarlo.

i) La superficie de pasto que se corta en un terreno acotado, respecto de la cantidad de personas que hacen el trabajo (suponiendo que todos trabajan al mismo ritmo).

2) La Tierra se encuentra a unos 149 millones de kilómetros del sol. Viajando a la velocidad de la luz, llegaríamos al sol en 8 minutos y medio. La distancia de la Tierra a Marte es de 80 millones de kilómetros, viajando a la velocidad de la luz, ¿cuánto tiempo tardaríamos en llegar a Marte?

3) Un avión que viaja a 600 km por hora en promedio, tarda aproximadamente 2hs en ir de Buenos Aires a Mendoza. ¿Cuánto tardará en hacer el mismo recorrido un helicóptero que viaja a 200 km por hora?

4) Juan debe viajar del pueblo A al pueblo B, que se encuentran a 538 km de distancia. El problema es que hay un único camino para llegar y no hay estaciones de servicio a lo largo del mismo. Esto le preocupa a Juan, por lo que se puso a investigar sobre el consumo de combustible para un vehículo naftero promedio y averigúo lo siguiente:

a) Manteniendo una velocidad constante de 90 km/h, gasta aproximadamente 6,2 litros de nafta cada 100 kilómetros recorridos.

b) Manteniendo una velocidad constante de 120 km/h, gasta aproximadamente 8 litros de nafta cada 100 kilómetros recorridos.

Si su auto tiene un tanque de 50 litros y lo llena antes de salir de la ciudad A:

a) Si va a 90 km/h, ¿llegará hasta la ciudad B o se quedará sin nafta en el camino?

b) ¿Y si va a 120km/h?

c) ¿Cuánto tardará en cada caso?

d) Si la nafta cuesta $1016 el litro, ¿cuánto gastará en ir de A a B yendo a 90 km/h? ¿y si va a 120 km/h?

5) Para pintar un paredón muy grande, un obrero notó que 3 baldes de pintura le alcanzaban para cubrir 2 metros de alto por 9 metros de ancho. Con los mismos 3 baldes, ¿qué largo se puede cubrir si se pinta hasta una altura de 1,5 metros?

6) El plano de una casa está hecho en una escala de $1:50$, es decir, $1\ cm$ en el plano representa $50\ cm$ reales.

a) ¿Cuáles serán las medidas en el plano de una habitación de $3\ m$ por $4\ m$?

b) Si las medidas del comedor en el plano son $8,3\ cm$ por $11,8\ cm$, ¿cuáles son las medidas reales del comedor?

6. Porcentaje

El símbolo $\%$ se lee "*por ciento*" y significa por cada 100 unidades.
Un porcentaje es una relación de proporcionalidad directa donde el 100 corresponde al total, por lo tanto, para su cálculo podemos usar regla de tres simple directa.
Los porcentajes pueden representarse mediante fracciones y, por lo tanto, también admiten una representación decimal.

Ejemplos:

- El 13% significa 13 de cada 100. O sea:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1 \\ 13\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x = \dfrac{13 \cdot 1}{100} = \dfrac{13}{100} = 0,13 \end{array}$$

Luego: $13\% = \dfrac{13}{100} = 0,13$

- El 50% significa 50 de cada 100. O sea:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1 \\ 50\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x = \dfrac{50 \cdot 1}{100} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5 \end{array}$$

Luego: $50\% = \dfrac{50}{100} = \dfrac{25}{50} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} = 0,5$

- El $23,5\%$ significa $23,5$ de cada 100. O sea:

$$\begin{array}{lll} 100\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 1 \\ 23,5\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x = \dfrac{23,5 \cdot 1}{100} = \dfrac{235}{1000} = 0,235 \end{array}$$

Luego: $23,5\% = \dfrac{235}{1000} = 0,235$

Cálculo de un porcentaje de una cantidad

Para calcular el $p\%$ de una cantidad x:

$$\begin{array}{rll} 100\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & x \\ p\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & \dfrac{x \cdot p}{100} \end{array}$$

Luego: $p\%$ de $x = \dfrac{x \cdot p}{100}$

Notar que este cálculo siempre depende de la cantidad con respecto a la cual se obtendrá el porcentaje. Si esta cantidad cambia, la cantidad que representa el porcentaje también cambiará.

Ejemplo:

Calcular el 70% de 240.

$$\begin{array}{rll} 100\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & 240 \\ 70\% & \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} & \dfrac{240 \cdot 70\%}{100\%} \end{array}$$

Luego: 70% de $240 = \dfrac{240 \cdot 70}{100} = 168$

Cálculo del porcentaje que representa una cantidad respecto de otra cantidad

Para calcular el porcentaje p que representa una cantidad y respecto de una cantidad x:

$$
\begin{array}{lcl}
x & \underline{\hspace{3cm}} & 100\% \\
y & \underline{\hspace{3cm}} & \dfrac{y \cdot 100\%}{x}
\end{array}
$$

Luego: $p = \dfrac{y \cdot 100}{x}\%$

Ejemplo:

Calcular el porcentaje que representa 8 respecto de 40.

$$
\begin{array}{lcl}
40 & \underline{\hspace{3cm}} & 100\% \\
8 & \underline{\hspace{3cm}} & \dfrac{8 \cdot 100\%}{40} = 20\%
\end{array}
$$

Luego: $p = 20\%$

Cálculo de una cantidad conociendo un porcentaje de la misma

Para calcular una cantidad x sabiendo que su $p\%$ es y:

$$
\begin{array}{lcl}
p\% & \underline{\hspace{3cm}} & y \\
100\% & \underline{\hspace{3cm}} & x = \dfrac{100\% \cdot y}{p\%}
\end{array}
$$

Luego: $x = \dfrac{y \cdot 100}{p}$

Ejemplo:

Calcular la cantidad cuyo 20% es 8.

$$
\begin{array}{lcl}
20\% & \underline{\hspace{3cm}} & 8 \\
100\% & \underline{\hspace{3cm}} & x = \dfrac{100\% \cdot 8}{20\%}
\end{array}
$$

Luego: $x = \dfrac{100\% \cdot 8}{20\%} = 40$

6.1. Práctica 6

1) Calcular:

a) el 46% de 220

b) el 73% de 4000

c) el 68% de 1500

d) el 130% de 535

2) Completar:

a) 168 es el 25% de ......

b) 425 es el 34% de ......

c) $429,6$ es el 10% de ......

d) $80,5$ es el 20% de ......

e) $33,8$ es el 65% de ......

3) Completar:

a) 168 es el ...... $\%$ de 1000

b) 6 es el ...... $\%$ de 120

c) 80 es el ...... $\%$ de 500

d) 93 es el ...... $\%$ de $1162,5$

e) 7500 es el ...... \% de 5000

4) Calcular el 10% del 20% del 60% de 1600. ¿Qué porcentaje es de 1600?

5) El acero al carbono es uno de los materiales más utilizados y versátiles en el mundo de la ingeniería y la industria manufacturera. Dependiendo del contenido de carbono y otros elementos, el acero adquiere distintas propiedades mecánicas como ser dureza, resistencia o maleabilidad. Los aceros al carbono se clasifican de acuerdo al porcentaje de carbono en su composición en:

- Aceros de bajo carbono con un contenido de carbono de $0,04\%$ a $0,30\%$
- Aceros de medio carbono con un contenido de carbono de $0,31\%$ a $0,60\%$
- Aceros de alto carbono con un contenido de carbono de $0,61\%$ a $1,50\%$
- Aceros de ultra-alto carbono con un contenido de carbono superior al $1,5\%$

a) ¿Cuánto carbono hay en 1 tonelada de acero de ultra-alto carbono con un contenido del 2% de carbono?

b) La cantidad de carbono en $7800\ kg$ de acero al carbono es de $156\ kg$, ¿cuál es la clasificación de dicho acero?

c) Una siderurgia usó $30\ kg$ de carbono para hacer acero con un contenido de carbono del $0,75\%$ ¿Cuántos kg de acero produjo?

6) Un comprimido de $2\ g$ contiene 20% de aspirina, 35% de vitamina C y 45% de excipiente. ¿Cuánto contiene de cada componente?

7) El precio final de un artículo se obtiene agregando al precio de lista el 21% debido al IVA. Si el precio final de un pantalón es de $\$56386$, ¿cuál es su precio de lista?

8) Un supermercado tiene las siguientes promociones pagando en una cuota:

- Con la tarjeta de crédito de tu banco, hay un 30% de descuento, con un tope de reintegro de $\$15000$.
- Con la tarjeta de descuentos del supermercado, hay un 20% de descuento, sin tope de reintegro.

a) Si tuvieras que realizar una compra de $\$45000$, ¿con qué tarjeta pagarías para obtener el mayor descuento? ¿por qué?

b) ¿Y si la compra fuera de $\$100000$ qué opción elegirías? ¿por qué?

c) ¿Y si fuera de $\$75000$? ¿por qué?

7. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

7.1. Práctica 1

1)

9490, 9492, 9494, 9496, 9498 son múltiplos de 2
129345, 159345, 189345 son múltiplos de 3
11112, 11116 son múltiplos de 4
120, 123, 126, 129 son divisibles por 3
412, 432, 452, 472, 492 son divisibles por 4
99350, 99355 son múltiplos de 5
420, 450, 480, 405, 435, 465, 495 son divisibles por 3 y 5
432, 438 son múltiplos de 6
222, 228 son divisibles por 2 y 3
4720, 4728 son múltiplos de 8
2754 es múltiplo de 9
120, 126, 222, 228, 324, 420, 426, 522, 528, 624, 720, 726, 822, 828, 924 son divisibles por 6

2) $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$

3) $16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28$

4)

a) Cualquiera de las siguientes es una opción correcta:

$5 + 19 = 24$
$7 + 17 = 24$
$11 + 13 = 24$

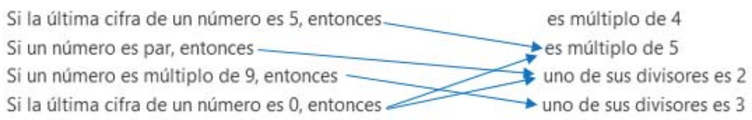
b) $53, 59, 61, 67$

c) $14, 15$ o $15, 16$

d) Cualquiera de las siguientes es una opción correcta:

$4 + 35 = 39$
$6 + 33 = 39$
$9 + 30 = 39$
$12 + 27 = 39$
$14 + 25 = 39$
$15 + 24 = 39$
$18 + 21 = 39$

5)



6) Siendo que $18 = 2 \cdot 3^2$ para que un número sea divisible por 18 entre sus factores deben figurar 3^2 y 2:

a) $300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \rightarrow 300$ no es divisible por 18

b) $1053 = 3^4 \cdot 13 \rightarrow 1053$ no es divisible por 18

c) $306 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \rightarrow 306$ es divisible por 18

7) $1050 = 42 \cdot 25 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$, cualquier número que sea el producto de uno o más de estos factores será un divisor de 1050. Luego:

a) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ es divisor de 1050

b) $25 = 5^2$ es divisor de 1050

c) $6 = 2 \cdot 3$ es divisor de 1050

d) 7 es divisor de 1050

e) $21 = 3 \cdot 7$ es divisor de 1050

f) $35 = 5 \cdot 7$ es divisor de 1050

En conclusión, todos los números dados son divisores de 1050

8)

- $46, 92, 138$ son tres números que tienen a 46 como divisor común. Hay otros números posibles, todo múltiplo de 46 es divisible por 46.
- $1, 2, 23$ son tres números que tienen a 46 como múltiplo. Hay otras posibilidades, en cada una de ellas se consideran dos de los números anteriores y el 46.

9)

a) $mcm(24, 96) = 96$, $dcm(24, 96) = 24$

b) $mcm(35, 12) = 420$, $dcm(35, 12) = 1$

c) $mcm(27, 45, 18) = 270$, $dcm(27, 45, 18) = 9$

d) $mcm(60, 108, 36) = 540$, $dcm(60, 108, 36) = 12$

7.2. Práctica 2

1)

a) $|-15| > -15$
b) $|15| = 15$
c) $|4+5| = |4| + |5|$
d) $|-4+5| < |-4| + |5|$
e) $|7-12| > |7| - |12|$
f) $-|-4| - |-8| < -|-4-(-8)|$

2)

a) La suma entre ocho y menos diez: $8 + (-10) = -2$
b) La diferencia entre cinco y doce: $5 - 12 = -7$
c) El siguiente de menos dos: $-2 + 1 = -1$
d) El valor absoluto de menos siete: $|-7| = 7$
e) El producto entre menos cinco y ocho: $(-5) \cdot 8 = -40$
f) El anterior de menos nueve: $-9 - 1 = -10$
g) El cociente entre veinte y menos cuatro: $20 : (-4) = -5$
h) La diferencia entre seis y menos tres: $6 - (-3) = 9$
i) El valor absoluto del siguiente de menos nueve: $|-9+1| = 8$
j) La mitad del consecuente de sesenta y cinco: $(65+1) : 2 = 33$
k) El triple del anterior de cuarenta y cinco: $3 \cdot (45-1) = 132$
l) La tercera parte del siguiente de menos cuarenta: $\frac{1}{3} \cdot (-40+1) = -13$
m) La suma entre el anterior de ocho y el siguiente de menos treinta: $(8-1) + (-30+1) = -22$
n) El producto entre tres y el siguiente de menos quince: $3 \cdot (-15+1) = -42$

3)

a) El siguiente de un número: $x+1, x \in \mathbb{Z}$
b) La suma de dos números consecutivos: $a + (a+1), a \in \mathbb{Z}$
c) Un número par: $2 \cdot n, n \in \mathbb{N}_0$
d) Un número impar: $2 \cdot n + 1, n \in \mathbb{N}_0$
e) El anterior de un número: $k-1, k \in \mathbb{Z}$
f) Un múltiplo de tres: $3 \cdot n, n \in \mathbb{N}_0$
g) La mitad de un número: $x : 2 = \frac{1}{2}x$
h) La tercera parte de un número: $x : 3 = \frac{1}{3}x$
i) El triple del consecutivo de un número: $3 \cdot (b+1), b \in \mathbb{Z}$
j) La cuarta parte del anterior de un número: $(k-1) : 4 = \frac{1}{4}(k-1), k \in \mathbb{Z}$
k) El anterior de la cuarta parte de un número: $(k:4) - 1 = \left(\frac{1}{4}k\right) - 1, k \in \mathbb{Z}$
l) El siguiente del doble de un número: $2 \cdot a + 1, a \in \mathbb{Z}$

4)

a) 13
b) -2
c) -37
d) -5
e) -23
f) -17
g) -9
h) -30
i) -31
j) -37
k) -3

7.3. Práctica 3

Práctica 3

1)

a) Son equivalentes puesto que: $1 \cdot 6 = 6 = 2 \cdot 3$

b) No son equivalentes puesto que: $4 \cdot 9 = 36 \neq 48 = 3 \cdot 16$

c) Son equivalentes puesto que: $-4 \cdot 3 = -12 = 1 \cdot (-12)$

d) Son equivalentes puesto que: $-2 \cdot (-6) = 12 = 3 \cdot 4$

e) No son equivalentes puesto que: $7 \cdot 14 = 98 \neq 2 = 1 \cdot 2$

f) No son equivalentes puesto que: $8 \cdot 7 = 56 \neq 42 = 21 \cdot 2$

2)

a) $\frac{3}{9} = \frac{6}{18} = \frac{15}{45}$

b) $\frac{15}{2} = \frac{75}{10} = \frac{30}{4}$

c) $\frac{28}{16} = \frac{7}{4} = \frac{21}{12}$

d) $\frac{20}{-8} = \frac{-5}{2} = \frac{-30}{12}$

e) $\frac{-48}{3} = \frac{-64}{4} = \frac{-16}{1}$

f) $\frac{7}{9} = \frac{14}{18} = \frac{35}{45}$

3)

a) $\frac{5}{6} = \frac{20}{24}$ y $\frac{7}{8} = \frac{21}{24} \implies \frac{5}{6} < \frac{7}{8}$

b) $\frac{9}{4} = \frac{27}{12}$ y $\frac{11}{6} = \frac{22}{12} \implies \frac{9}{4} > \frac{11}{6}$

c) $-\frac{3}{5} = -\frac{9}{15}$ y $-\frac{2}{3} = -\frac{10}{15} \implies -\frac{3}{5} > -\frac{2}{3}$

d) $-\frac{5}{2} = -\frac{35}{14}$ y $-\frac{16}{7} = -\frac{32}{14} \implies -\frac{5}{2} < -\frac{16}{7}$

4)

a) $\mathbf{1,223 > 1,2223}$

b) $\mathbf{\frac{37}{15} > 2,46}$

c) $\mathbf{\frac{3}{16} > 0,187}$

d) $\mathbf{\frac{3}{16} = 0,1875}$

e) $\mathbf{\frac{1}{3} > 0,3333}$

f) $\mathbf{0,9 = 0,90}$

g) $\mathbf{\frac{45}{6250} < 0,007\hat{2}}$

h) $\mathbf{\frac{2}{3} < 0,666667}$

i) $\mathbf{1 = 0,\hat{9}}$

5)

a) $\frac{4}{5} = 0,8$ y $\frac{9}{10} = 0,9 \implies \frac{4}{5} < \frac{9}{10}$

b) $-\frac{5}{6} = -0,8\hat{3}$ y $-\frac{17}{20} = -0,85 \implies -\frac{5}{6} > -\frac{17}{20}$

c) $\frac{14}{3} = 4,\hat{6}$ y $\frac{21}{5} = 4,2 \implies \frac{14}{3} > \frac{21}{5}$

d) $-\frac{20}{9} = -2,\hat{2}$ y $-\frac{11}{5} = -2,2 \Longrightarrow -\frac{20}{9} < -\frac{11}{5}$

6) No hay una única solución para este ejercicio, algunas posibles son las siguientes:

a) $0 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{5}{6} < 1$

b) $\frac{5}{3} < \frac{11}{6} < 2 < \frac{9}{4} < \frac{5}{2}$

c) $-\frac{4}{3} < -\frac{7}{6} < -1 < -\frac{5}{6} < -\frac{2}{3}$

d) $-\frac{8}{5} < -\frac{3}{2} < -\frac{7}{5} < -\frac{13}{10} < -\frac{6}{5}$

e) $\frac{10}{13} < \frac{21}{26} < \frac{11}{13} < \frac{23}{26} < \frac{12}{13}$

f) $-\frac{3}{7} < -\frac{5}{14} < -\frac{2}{7} < -\frac{3}{14} < -\frac{1}{7}$

7) En cada caso, escribir la fracción equivalente irreducible.

a) $\frac{15}{50} = \frac{3}{10}$

b) $\frac{180}{63} = \frac{20}{7}$

c) $1\frac{26}{39} = \frac{5}{3}$

d) $-\frac{45}{100} = -\frac{9}{20}$

e) $0,6 = \frac{3}{5}$

f) $-2,35 = -\frac{47}{20}$

g) $1,22 = \frac{61}{50}$

h) $0,255 = \frac{51}{200}$

i) $0,\hat{2} = \frac{2}{9}$

j) $1,\widehat{62} = \frac{161}{99}$

k) $32,3\hat{1} = \frac{1454}{45}$

l) $0,\widehat{271} = \frac{271}{999}$

7.4. Práctica 4

1)

a) $\frac{53}{18}$

b) -28

c) $-\frac{6}{5}$

d) $\frac{16}{15}$

e) $-\frac{4}{15}$

f) $\frac{80}{21}$

g) $\frac{38}{15}$

h) $-\frac{4}{3}$

i) $\frac{17}{27}$

j) $\frac{76}{45}$

2)

a) Duerme $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$ del día.
b) Son $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$ de un siglo.
c) Las vocales representan $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ del total de letras.
d) En 2 enteros hay 16 octavos.

3)

a) Están asfaltados los $\frac{7}{20}$ del camino.
b) La parte empedrada es mayor.
c) No puesto que $\frac{7}{20} < \frac{1}{2}$.
d) $56km$ serían empedrados.
e) $35km$ serían de tierra.
f) $49km$ serían asfaltados.

4) La nueva mezcla tiene $\frac{9}{10}$ de pintura blanca y $\frac{1}{10}$ de pintura negra.

5) Lo partió en 6 porciones.

7.5. Práctica 5

1)

- **a)** Inversamente proporcionales
- **b)** Inversamente proporcionales
- **c)** Directamente proporcionales
- **d)** Inversamente proporcionales
- **e)** Inversamente proporcionales
- **f)** Inversamente proporcionales
- **g)** Inversamente proporcionales
- **h)** Directamente proporcionales
- **i)** Inversamente proporcionales

2) Tardaríamos, aproximadamente, $4,56$ minutos.

3) Tardará 6 horas.

4)

- **a)** Podrá llegar a la ciudad B.
- **b)** Podrá llegar a la ciudad B.
- **c)** Si va a $90km/h$ llegará en aproximadamente 6 horas. Si va a $120km/h$ llegará en, aproximadamente, 4 horas y media.
- **d)** Si va a $90km/h$ gastará, aproximadamente, $\$33889,7$. Si va a $120km/h$ gastará, aproximadamente, $\$43728,7$.

5) Podrá cubrir un largo de $12m$.

6)

- **a)** En el plano, las medidas son $6cm$ por $8cm$, respectivamente.
- **b)** Las medidas reales son $4,15m$ por $5,90m$, respectivamente.

7.6. Práctica 6

1)

a) $\frac{46}{100} \cdot 220 = 101,2$

b) $\frac{73}{100} \cdot 4000 = 2920$

c) $\frac{68}{100} \cdot 1500 = 1020$

d) $\frac{130}{100} \cdot 535 = 695,5$

2)

a) $\frac{168 \cdot 100}{25} = 672$

b) $\frac{425 \cdot 100}{34} = 1250$

c) $\frac{429,6 \cdot 100}{10} = 4296$

d) $\frac{80,5 \cdot 100}{20} = 402,5$

e) $\frac{33,8 \cdot 100}{65} = 52$

3)

a) $\frac{168 \cdot 100}{1000} = 16,8\%$

b) $\frac{6 \cdot 100}{120} = 5\%$

c) $\frac{80 \cdot 100}{500} = 16\%$

d) $\frac{93 \cdot 100}{1162,5} = 8\%$

e) $\frac{7500 \cdot 100}{5000} = 150\%$

4)

$$\frac{10}{100} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{60}{100} \cdot 1600 = 19,2.$$

$$\frac{19,2 \cdot 100}{1600} = 1,2\%$$

5)

a) $20kg$

b) acero de ultra-alto carbono

c) $4000kg$

6) Contiene $0,4g$ de aspirina, $0,7g$ de vitamina C y $0,9g$ de excipiente.

7) El precio de lista del pantalón es $\$46600$.

8)

a) Es más conveniente usar la tarjeta de crédito del banco puesto que se ahorrarían $\$13500$ en la compra, mientras que usando la tarjeta de descuentos del supermercado sólo se ahorrarían $\$9000$.
b) Es más conveniente usar tarjeta de descuentos del supermercado puesto que se ahorrarían $\$20000$ en la compra, mientras que usando la tarjeta de crédito del banco, debido al tope de reintegro, sólo se ahorrarían $\$15000$.
c) En este caso es indistinto el uso de cualquiera de las dos tarjetas puesto que con ambas el ahorro sería de $\$15000$.

Teoría de Conjuntos

Tabla de contenidos

1. El concepto de conjunto

Una **definición** es un enunciado breve por medio del cual se expone, de manera clara y precisa, las características distintivas de un concepto. Sin embargo en matemática hay ciertos conceptos, llamados **conceptos primitivos**, que no tienen una definición y se acepta la idea que tenemos sobre ellos.
El concepto de conjunto es primitivo. Cuando nos referimos a un conjunto lo asociamos con la idea de colección de objetos, de grupos de elementos, etc.

A los conjuntos, generalmente, los nombramos con letras mayúsculas: A, B, C,$\ldots$
A los elementos de un conjunto, generalmente, los nombramos con letras minúsculas: a, b, c,$\ldots$

2. Representación de conjuntos

Los conjuntos pueden representarse:

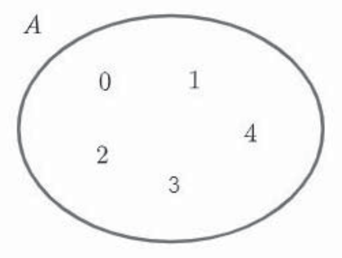
- Por **extensión**: es cuando, entre llaves, listamos todos los elementos del conjunto separándolos por coma o por punto y coma (es indistinto usar uno u otro signo salvo que algún elemento sea una expresión decimal, caso para el cual corresponde usar punto y coma). La escritura por extensión es una forma que podemos usar en tanto el conjunto tenga una cantidad finita de elementos.

Ejemplo: $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

- Por **comprensión**: Es cuando indicamos las propiedades que deben cumplir los elementos para pertenecer al conjunto. Estructura en la notación por compresión: $\{x/x\ tiene\ la\ propiedad\ p\}$

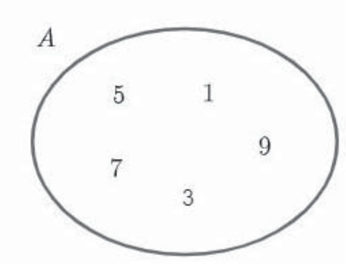
Ejemplo: $A = \{x/x \in \mathbb{N}_0, x < 5\}$

- **De forma gráfica**: Se realiza mediante el uso de un *diagrama de Venn*, una curva plana cerrada en cuyo interior se ubican los elementos del conjunto.

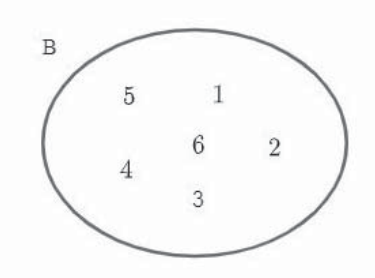


Más ejemplos:

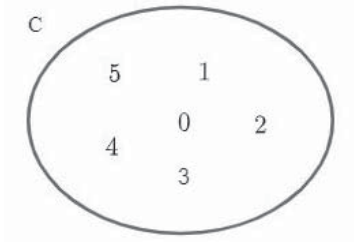
a) $A = \{x/x \text{ es un número dígito impar}\}$
Los números dígitos son los elementos de $\mathbb{N}_0$ que tienen una sola cifra, los números dígitos impares son: 1, 3, 5, 7 y 9 . Por lo que, escrito por extensión, el conjunto es: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$.
Gráficamente:



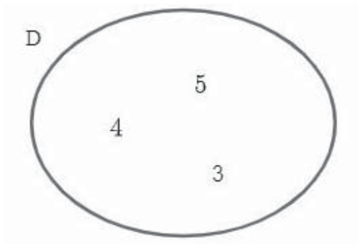
b) $B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 6\}$
Los elementos de este conjunto serán números naturales menores o iguales a 6. Por extensión: $B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Gráficamente:



c) $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 6\}$
Los elementos de este conjunto serán números naturales con el cero menores a 6. Por extensión: $C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
Gráficamente:



d) $D = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 3 \leq x < 6\}$
Los elementos de este conjunto serán números naturales, incluido el cero, mayores o iguales a 3 y menores a 6. Por extensión: $D = \{3; 4; 5\}$
Gráficamente:



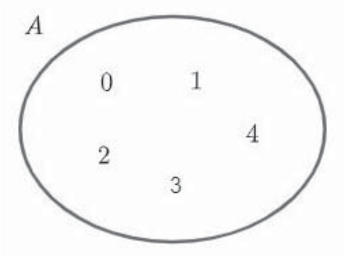
3. Relación de pertenencia

Decimos que el elemento a **pertenece** al conjunto A y lo simbolizamos $a \in A$, si a es un elemento de A. En caso contrario, diremos que el elemento a no pertenece al conjunto A y lo simbolizamos $a \notin A$.

Notar que la relación de **pertenencia** es una relación entre un elemento y un conjunto.

Ejemplo:

$A = \{x / x \in \mathbb{N}_0, x < 5\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$



¿0 pertenece a A ($0 \in A$)? Sí, porque 0 es un elemento de A

¿5 pertenece a A ($5 \notin A$)? No, porque 5 no es un elemento de A

4. Relación de inclusión

Decimos que un conjunto B es un **subconjunto** de un conjunto A, o que el conjunto B está contenido en el conjunto A, si todos los elementos de B también son elementos de A.
En símbolos: $B \subset A \Leftrightarrow (\forall b \in B \Rightarrow b \in A)$

Notar que a relación de inclusión, contención o subconjunto es una relación entre conjuntos.

Ejemplo:

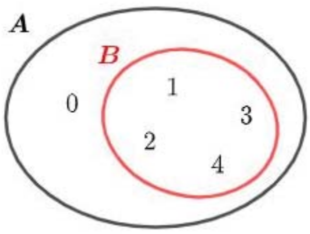
$A = \{x/x \in \mathbb{N}_0, x < 5\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

$B = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 5\} = \{1; 2; 3; 4\}$

¿$B \subset A$? Sí, pues todo elemento de B es también un elemento de A.

¿$A \subset B$? No, pues $0 \in A$ pero $0 \notin B$.

El siguiente gráfico muestra la relación entre ambos conjuntos:



5. Igualdad entre conjuntos

Dos conjuntos, A y B, son iguales cuando poseen los mismos elementos, esto es, cuando todo elemento de A es también elemento de B y todo elemento de B es también elemento de A

En símbolos:

$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$

Ejemplo:

Los siguientes conjuntos son iguales:

$A = \{x/x \in \mathbb{N}, x < 2\} = \{1\}$

$B = \{x/x \in \mathbb{N}, x - 1 = 0\} = \{1\}$

6. El conjunto vacío

El **conjunto vacío** es el conjunto que no tiene elementos y simbolizamos con $\emptyset$ o $\{\}$.

Ejemplos:

a) $\{x/x \ es \ un \ ser \ humano \ que \ viaj\text{ó} \ a \ otra \ galaxia \ hasta \ 2024\} = \emptyset$

b) $\{x \in \mathbb{Z}/x^2 = -1\} = \emptyset$

7. Práctica 1

1) Escribe por extensión los siguientes conjuntos:

a) $A = \{x/x = 2n, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 7\}$
b) $B = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 5\}$
c) $C = \{x/x\ es\ vocal\ de\ la\ palabra\ \text{"}\ agua\ \text{"}\}$
d) $D = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 0 < x < 6\}$
e) $E = \{x/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0,\ x \leq 7\}$
f) $F = \{x/x = 5n, n \in \mathbb{N}_0,\ 1 \leq x < 18\}$
g) $G = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$

2) Escribe por comprensión:

a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$
b) $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
c) $C = \{10, 11, 12, 13\}$
d) $D = \{0, 4, 8, 12, 16, 20\}$

3) Sean $A = \left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right\};\ B = \{1, 2, 3\};\ C = \{x \in \mathbb{Z}/x \leq 2\}$, determina la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados:

a) $B \subset A$

b) $\{1\} \in B$

c) $\frac{3}{2} \in A$

d) $B \subset C$

4) Determinar en cada caso si los conjuntos son iguales. En caso de no serlo, indicar si hay alguna relación de contención entre ellos.

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 6\}$ y $B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -1 < x \leq 5\}$

b) $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge\ x\ es\ impar\}$ y $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

c) $E = \{x/\ x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ DESTINADA\}$ y $F = \{x/\ x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ SENTIDA\}$

8. Operaciones

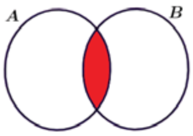
Al igual que se realizan operaciones como ser la suma y la multiplicación con los números, también es posible definir operaciones entre conjuntos. Los resultados de dichas operaciones serán conjuntos.

8.1. Intersección

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con los elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente. Es decir, que un elemento x pertenece a la ``intersección'' siempre y cuando esté simultáneamente en A y en B.

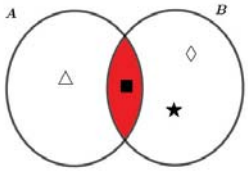
En símbolos: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Gráficamente:

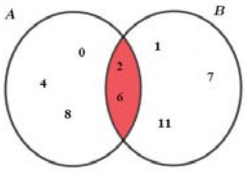


Ejemplos:

a) $A = \{\triangle, \blacksquare\}; B = \{\blacksquare, \lozenge, \bigstar\} \Longrightarrow A \cap B = \{\blacksquare\}$



b) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}; B = \{1, 2, 6, 7, 11\} \Leftrightarrow A \cap B = \{2, 6\}$



Dos conjuntos se dicen **disjuntos** si no tienen elementos en común. En símbolos:

$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

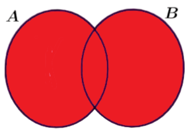
Por ejemplo, el conjunto de los números pares y el conjunto de los números impares son disjuntos.

8.2. Unión

La **unión** de dos conjuntos A y B es el conjunto que se conforma con todos los elementos de ambos conjuntos, es decir, por todos los elementos que son sólo de A, también los que son sólo de B y los que son elementos de ambos conjuntos.

En símbolos: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Gráficamente:

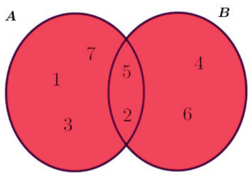


Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$; $B = \{2, 4, 5, 6\}$

La unión de los conjuntos A y B, se determina por los elementos que se encuentran en, al menos, uno de los conjuntos A o B. Es decir, los elementos pueden pertenecer sólo a A, sólo a B o, finalmente, pertenecer a ambos.

Resulta entonces que $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



9. Cardinal

Definimos el **cardinal** de un conjunto finito (que no tiene una cantidad infinita de elementos), como el número de elementos del mismo. Simbólicamente el cardinal de A suele escribirse: $|A|$ o $card(A)$

Ejemplos:

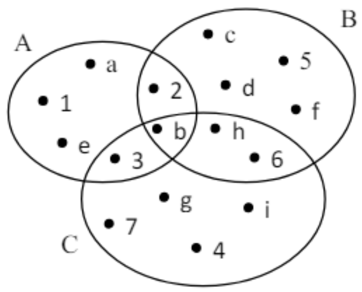
a) $A = \{1, 2, 3, 5, 7\} \Rightarrow |A| = 5$

b) $B = \{2, 4, 5, 6\} \Rightarrow |B| = 4$

c) $C = \emptyset \Rightarrow |C| = 0$

10. Práctica 2

1) Determinar las siguientes operaciones entre los conjuntos dados:



a) $A \cap B$

b) $C \cup A$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cup B) \cap C$

2) Sean $A = \{x \in \mathbb{N}/x < 6\}$, $B = \{1, 4, 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N}/x\ es\ primo \wedge x \leq 9\}$ y $D = \{2, 5, 7\}$. Representar gráficamente los cuatro conjuntos y obtener:

a) $C \cap D$

b) $A \cap B \cap C$

c) $D \cap (B \cup C)$

d) $A \cup \emptyset$

e) $B \cap \emptyset$

f) $(A \cap D) \cup B$

3) Sean $A = \{x \in \mathbb{N}_0/x = 4n, n \in \mathbb{N}_0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}_0/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N}_0/x = 6n, n \in \mathbb{N}_0\}$.

Determinar los conjuntos que se indican:

a) $A \cap \mathbb{N}_0$

b) $A \cup \mathbb{N}_0$

c) $A \cap B$

d) $B \cap C$

e) $C \cap B$

f) $A \cap \emptyset$

g) $B \cup \emptyset$

h) $(A \cap C) \cap B$

i) $A \cap (C \cap B)$

11. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

11.1. Práctica 1

1)

a) $A = \{0; 2; 4; 6\}$

b) $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$

c) $C = \{a; u\}$

d) $D = \{1; 2; 3; 4; 5\}$

e) $E = \{1; 3; 5; 7\}$

f) $F = \{5; 10; 15\}$

g) $G = \emptyset$

2) Tener en cuenta que no existe una única forma de escribir los conjuntos dados por comprensión. Las siguientes son algunas opciones:

a) $A = \{x/x = 2n, n \in \mathbb{N}_0, x \leq 9\}$

b) $B = \{x/x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0,\ x \leq 10\}$

c) $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge 9 < x < 14\}$

d) $D = \{x/x = 4n, n \in \mathbb{N}_0,\ x \leq 20\}$

3)

$$A = \left\{\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right\}$$

$$B = \{1, 2, 3\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z}/x \leq 2\} = \{\ldots; -1; 0; 1; 2\}$$

a) $B \subset A$ Falso pues, por ejemplo, $1 \in B$ pero $1 \notin A$.

b) $\{1\} \in B$ Falso pues $\{1\}$ y B son conjuntos y la pertenencia es una relación entre un elemento y un conjunto.

c) $\frac{3}{2} \in A$ Verdadero pues $\frac{3}{2}$ es un elemento del conjunto A.

d) $B \subset C$ Falso pues $3 \in B$ pero $3 \notin C$.

4)

a) $A = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge x < 6\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
$B = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -1 < x \leq 5\} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$
Resulta que: $(A \subset B \wedge B \subset A) \Rightarrow A = B$

b) $C = \{x/x \in \mathbb{N}_0 \wedge\ x\ es\ impar\} = \{1; 3; 5; 7; 9; \ldots\}$
$D = \{1; 3; 5; 7; 9\}$
Resulta que: $C \not\subset D \Rightarrow C \neq D, D \subset C$

c) $E = \{x/\ x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ DESTINADA\} = \{D, E, S, T, I, N, A\}$
$F = \{x/\ x\ es\ una\ letra\ de\ la\ palabra\ SENTIDA\} = \{S, E, N, T, I, D, A\}$
Resulta que: $(E \subset F \wedge F \subset E) \Rightarrow E = F$

11.2. Práctica 2

1)

a) $A \cap B = \{2, b\}$

b) $C \cup A = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, a, b, e, g, h, i\}$

c) $A \cap B \cap C = \{b\}$

d) $(A \cup B) \cap C = \{3, b, h, 6\}$

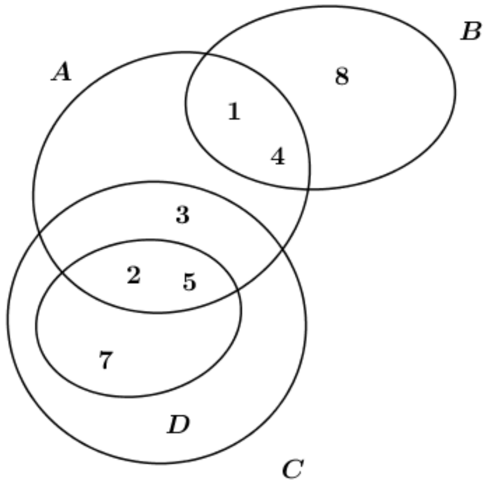
2)

$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B = \{1, 4, 8\}$

$C = \{x \in \mathbb{N} / x \; es \; primo \wedge x \leq 9\} = \{2, 3, 5, 7\}$

$D = \{2, 5, 7\}$



a) $C \cap D = D = \{2, 5, 7\}$

b) $A \cap B \cap C = \emptyset$

c) $D \cap (B \cup C) = D = \{2, 5, 7\}$

d) $A \cup \emptyset = A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

e) $B \cap \emptyset = \emptyset$

f) $(A \cap D) \cup B = \{1, 2, 4, 5, 8\}$

3)

$A = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = 4n, n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 4, 8, 12, 16, \ldots\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = 2n + 1, n \in \mathbb{N}_0\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

$C = \{x \in \mathbb{N}_0 / x = 6n, n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, 6, 12, 18, \ldots\}$.

a) $A \cap \mathbb{N}_0 = A$

b) $A \cup \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}_0$

c) $A \cap B = \emptyset$

d) $B \cap C = \emptyset$

e) $C \cap B = \emptyset$

f) $A \cap \emptyset = \emptyset$

g) $B \cup \emptyset = B$

h) $(A \cap C) \cap B = \emptyset$

i) $A \cap (C \cap B) = \emptyset$

Números Reales

Tabla de contenidos

1. Conjuntos numéricos

Conjunto de los números naturales

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, 12001, 12002, \ldots\}$

Conjunto de los números naturales con el cero

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 12001, 12002, \ldots\}$

Conjunto de los números enteros

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -21, -20, \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto de los números racionales

$\mathbb{Q} = \left\{x/x = \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\right\}$

Los números racionales son aquellos que podemos escribir como cociente (razón) de números enteros, sus expresiones decimales son infinitas periódicas.

Nota: las expresiones decimales exactas son aquellas de período nulo.

Conjunto de los números irracionales

$I = \{x/x\ no\ es\ racional\}$

Son todos los números que no pueden escribirse en forma de fracción, sus representaciones decimales son infinitas no periódicas.

Conjunto de los números reales

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Notar que:

- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

Representación en la recta numérica

Hay una relación biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta numérica. Con esto nos referimos a que a cada punto de una recta numérica le podemos hacer corresponder un número real (llamado coordenada del punto), y viceversa, a cada número real le corresponde un único punto de la recta numérica.

El conjunto de los números reales es *denso*; es decir, entre dos números reales (por más "juntos" que estén) siempre se podrá encontrar otro número real.

Ya se trabajó con la representación de números racionales. Para representar algunos números irracionales podemos usar estrategias basadas en el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, para representar $\sqrt{2}$.

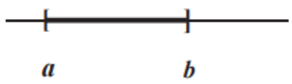
En general, basta con utilizar una aproximación de dicho número. Por ejemplo: $\pi \approx 3,1$

2. Intervalos reales

Un **intervalo real** es un conjunto formado por todos los números reales que se encuentran entre dos números dados - pudiendo o no estos dos números estar en dicho conjunto - o que son mayores o menores que un cierto número dado - pudiendo o no estar dicho número en el conjunto. En el primer caso, el intervalo se dice **acotado** y su representación geométrica es un segmento y, en el segundo, se dice **no acotado** siendo su representación geométrica una semirrecta. Existen ocho tipos de intervalos reales, cuatro acotados y cuatro no acotados. Los mismos se muestran en las siguientes tablas:

Intervalos reales acotados

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

Intervalo cerrado	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$	
Intervalo abierto	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$	
Intervalo cerrado a izquierda y abierto a derecha	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$	
Intervalo abierto a izquierda y cerrado derecha	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$	

Notar que el paréntesis, $(\ )$, indica que el extremo no pertenece al intervalo mientras que el corchete, $[\ ]$, indica lo contrario. En la representación gráfica, en lugar de los paréntesis puede utilizarse un punto "vacío" y en lugar de los corchetes un punto "lleno".

Intervalos reales no acotados

Sea $a \in \mathbb{R}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ 

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$ 

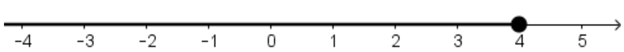
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ 

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ 

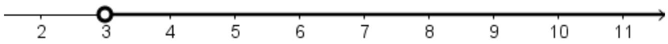
Notar que en este último tipo de intervalos, en el extremo correspondiente, se pone $-\infty$ o $+\infty$ (menos infinito o más infinito), indicando que por ese extremo el intervalo no tiene límite. Además, siempre se usa un paréntesis ya que el infinito, al no ser un número, no pertenece al intervalo.

Ejemplos:

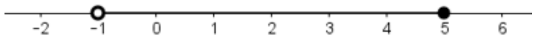
a) $(-\infty, 4]$ es el intervalo de todos los números reales menores o iguales que 4.



b) $(3, +\infty)$ es el intervalo de todos los números reales mayores a 3



c) $(-1, 5]$ es el intervalo de todos los números reales mayores que -1 y menores o iguales que 5



2.1. Práctica 1

1) Considerar el conjunto:

$$A = \left\{-8;\ 7;\ 0;\ \tfrac{89}{4};\ 15,6;\ \sqrt{3};\ 2,\hat{3};\ \pi;\ -\sqrt{2}\right\}$$

Escribir por extensión los siguientes conjuntos:

- $\{x \in A / x \in \mathbb{Z}\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{N}\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{I}\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{Q}^+\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{R}_0^+\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{Q}\}$

2) a) Expresar como intervalo los siguientes conjuntos y representarlos gráficamente:

$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 5\}$

b) Resolver:

i) $B \cup C$

ii) $A \cap C$

iii) $B \cap C$

iv) $A \cap B$

3) Expresar cada intervalo por comprensión y representar gráficamente.

a) $(-3; 0)$

b) $[2; 8)$

c) $[2; \infty)$

d) $(2; 8]$

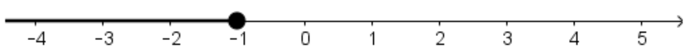
e) $[-6; -\dfrac{1}{2}]$

f) $(-\infty; 1)$

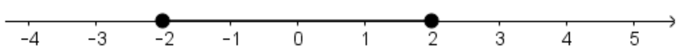
4) a) Escribir por comprensión y como intervalo los conjuntos que se grafican a continuación:

A

B



C



b) Resolver las operaciones indicadas:

i) $A \cap B$
ii) $A \cap C$
iii) $B \cup C$
iv) $A \cup C$
v) $(A \cup B) \cap C$

3. Operaciones

Veremos las operaciones suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación de números reales.

3.1. Suma, resta, multiplicación y división

Suma y producto

En los números reales están definidas las operaciones suma y producto, tales que para cualquier par de números reales a y b, $a + b$ y $a \cdot b$ dan por resultado un número real (ley de clausura o de cierre).

Propiedades de la suma y multiplicación

	Suma	Producto
Conmutativa	$a+b=b+a$	$a.b=b.a$
Asociativa	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a.b).c=a.(b.c)$
Existencia de elemento neutro	0 (cero) es neutro en la suma, ya que $a+0=a$	1 (uno) es neutro en el producto, ya que $a\,.\,1=a$
Existencia de elemento inverso	$-a$ es el opuesto de a $a+(-a)=0$	$\frac{1}{a}$ es recíproco de $a \neq 0$ $a\,.\,\frac{1}{a}=1$
Cancelativa	$a+b=a+c \implies b=c$	$a \neq 0\,;\, a.b=a.c \implies b=c$
Uniforme	$a=b \implies a+c=b+c$	$a=b \implies a.c=b.c$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$a.(b+c) = a.b + a.c$$

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma recibe otros nombres de acuerdo a como se la está utilizando:

$$\underset{\text{factor común}}{\overset{\text{distributiva}}{a.(b+c)=a.b+a.c}}$$

A partir de la suma y de la multiplicación se definen las operaciones resta y división:

- Siendo a y b números reales, la **resta** entre a y b se define: $a - b = a + (-b)$
- Siendo a y b números reales, con $b \neq 0$, la **división** entre a y b se define: $a : b = \frac{a}{b} = a\,.\,\frac{1}{b}$

3.2. Práctica 2

1) Escribir, en cada caso, el nombre de la o las propiedades utilizadas:

a) $2.(3+5) = (3+5).2$

b) $(x+2y)+3z = x+(2y+3z)$

c) $(5x+1).3 = 15x+3$

d) $7.(a+b+c) = 7.(a+b)+7.c$

2) Reescribir la expresión usando la propiedad indicada:

a) Propiedad conmutativa de la suma, $x+3 = \ldots\ldots\ldots$

b) Propiedad asociativa de la multiplicación, $7.(3.x) = \ldots\ldots\ldots$

c) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, $4.(a+b) = \ldots\ldots\ldots$

d) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, $5x+5y = \ldots\ldots\ldots$

3) Resolver, sin usar calculadora, indicando las propiedades y/o definiciones utilizadas en cada paso:

a) $\frac{4}{5}+5+\frac{1}{5}$

b) $\frac{3}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{8}{7}$

c) $5\,.\,\frac{3}{4}+5\,.\,\frac{1}{4}$

d) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{13}{7}}$

4) Sabiendo que $3x-3y=27$, usar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma para obtener el valor de $x-y$.

5) Sabiendo que $x+y=5$, usar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma para obtener el valor de $\sqrt{2}x+\sqrt{2}y$

6) Agregar, en cada caso, un par de paréntesis para obtener el resultado indicado.

a) $\frac{3}{2}+5\cdot 2+\frac{1}{4}=\frac{53}{4}$

b) $\frac{3}{2}+5\cdot 2+\frac{1}{4}=\frac{51}{4}$

c) $\frac{3}{2}-5\cdot 2+\frac{1}{4}=-\frac{35}{4}$

d) $\frac{3}{2}-5\cdot 2+\frac{1}{4}=-\frac{27}{4}$

3.3. Potenciación de exponente entero

Siendo $a \in \mathbb{R}$

- Si $n \in \mathbb{N}: a^n = \underbrace{a.a.\ldots.a}_{n \text{ factores } a}$
- Si $a \neq 0: a^0 = 1$
- Si $a \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a.a.\ldots.a}_{n \text{ veces}}}$

Ejemplos:

a) $\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{4^2}{5^2} = \dfrac{16}{25}$

b) $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$

c) $(-2,\widehat{31})^0 = 1$

d) $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

e) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$

Propiedades

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $m \in \mathbb{Z}$

1) Producto de potencias de igual base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

$(a)^n.(a)^m = (a)^{n+m}$

2) Cociente de potencias de igual base, se mantiene la base y se restan los exponentes.

$(a)^n : (a)^m = (a)^{n-m},\ a \neq 0$

3) Distributiva de la potenciación respecto del producto.

$(a \cdot b)^n = (a)^n.(b)^n$

4) Distributiva de la potenciación respecto del cociente.

$(a : b)^n = (a)^n : (b)^n,\ b \neq 0$

5) Potencia de otra potencia.

$[(a)^n]^m = (a)^{n.m}$

Ejemplos:

Aplicar propiedades para expresar de forma más simple.

a) $\dfrac{2^3 . 6}{18} = \dfrac{2^3 . 2 \cdot 3}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{2^3 \cdot 2^1 \cdot 3}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{2^{3+1} \cdot 3}{2 \cdot 3^2} = \dfrac{2^4 \cdot 3}{2^1 \cdot 3^2} = 2^{4-1} \cdot 3^{1-2} = 2^3 \cdot 3^{-1}$

b) $\dfrac{a^3.b^{-2}.c^5}{a^2.b^{-3}.c} = \dfrac{a^3}{a^2}.\dfrac{b^{-2}}{b^{-3}}.\dfrac{c^5}{c} = a^{3-2}.b^{-2-(-3)}.c^{5-1} = a^1.b^1.c^4 = abc^4$

c) $\frac{a^{n+2} . b^{2m+1}}{a^3 . b^{2m-3}} = a^{n+2-3} . b^{2m+1-(2m-3)} = a^{n-1} . b^{2m+1-2m+3} = a^{n-1} . b^4$

3.4. Práctica 3

1) Calcular haciendo uso de la definición y de las propiedades de la potenciación:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 . \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

b) $\left(\frac{2}{7}\right)^3 . \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$

c) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3 . \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}\right]^{-1}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} . (3)^{-2} + \frac{1}{2}$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

2) Aplicar propiedades de la potenciación para expresar de forma más simple:

a) $\frac{3^5 \; . \; 3^{-2} \; . \; 3^{-7} \; . \; 3^2}{3^{-3} \; . \; 3^2}$

b) $\frac{2^4 \; . \; 4^{-2} \; . \; 9^2 \; . \; 3^{-2}}{2^4 \; . \; 3}$

c) $\frac{8^2 \; . \; \left[6^2\right]^{-2}}{12^2}$

d) $\frac{a^4 . \, b . \, c^{-2}}{a^2 . \, a . \, b^4 . \, c^{-5}}$

e) $\frac{x^{-2} . \left[x^2\right]^3 \; . \; 3^{-2}}{x^4 \; . \; 9}$

f) $\frac{a^{2n+3} . \, b^{m+1}}{\left[a^{n+3}\right]^2 . \, b^{m-1}}$

g) $\frac{\left(5 \; . \; 3^{n+1}\right) : \left(5^2 \; . \; 3^n\right)}{5^{-1}}$

3) Simplificar aplicando propiedades de la potenciación. Escribir las respuestas sin exponente negativo:

a) $\left(\frac{4x^{-2}y^3}{x^{-3}y}\right)^2$

b) $\left(\frac{5x^5y}{(5x)^{-1}y^2}\right)^{-2}$

c) $\frac{\left(2x^3y\right)^{-1}}{x}$

d) $\dfrac{\left(3xyz^{-3}\right)^2}{\left(9x^2z^{-1}\right)^{-2}}$

3.5. Radicación

Sean $n \in \mathrm{N},\ n > 1,\ a \in \mathrm{R}$

- Si n es par y $a \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow\ b^n = a, b \geq 0$

- Si n es impar: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow\ b^n = a$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{-8} = -2$ pues $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt{16} = 4$ pues $4^2 = 16$

c) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{8}}$

d) No existe $\sqrt{-16}$ ya que no existe ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo.

Propiedades

Sean $n \in \mathrm{N},\ n > 1,\ a \in \mathrm{R},\ b \in \mathrm{R}$

1) Distributiva de la radicación respecto del producto.

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

2) Distributiva de la radicación respecto del cociente.

$$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b},\ b \neq 0$$

3) Raíz de otra raíz.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Extracción de factores de un radical

Caso 1. El radicando es un número: Se lo descompone, si es posible, en factores primos y luego se utilizan las propiedades de la radicación.

Ejemplos:

a) $\sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{3^5} = \sqrt[4]{3^{4+1}} = \sqrt[4]{3^4.\ 3^1} = \sqrt[4]{3^4}.\ \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$

b) $5\sqrt[3]{32} = 5\sqrt[3]{2^5} = 5\sqrt[3]{2^{3+2}} = 5\sqrt[3]{2^3.\ 2^2} = 5\sqrt[3]{2^3}.\ \sqrt[3]{2^2} = 10\sqrt[3]{2^2} = 10\sqrt[3]{4}$

Caso 2. El radicando es una letra: se utilizan las propiedades de la radicación.

Ejemplo:

$$\sqrt[4]{x^7} = \sqrt[4]{x^{4+3}} = \sqrt[4]{x^4.\,x^3} = \sqrt[4]{x^4}.\ \sqrt[4]{x^3} = x\sqrt[4]{x^3}$$

Caso 3. El radicando es una combinación de números y letras: se combinan los procedimientos anteriores.

Ejemplo:

$\sqrt[4]{243\,.\,x^7} = \sqrt[4]{243}.\ \sqrt[4]{x^7} = 3\sqrt[4]{3}.\ x\sqrt[4]{x^3} = 3x\sqrt[4]{3x^3}$

Racionalización de denominadores

Se llama **racionalizar denominadores** al proceso mediante el cual se logra que el denominador de una expresión sea un número racional a partir de la "eliminación" de los radicales presentes en dicho denominador.

Para racionalizar un denominador, se debe multiplicar el numerador y el denominador de la expresión por un factor que elimine la raíz o las raíces de su denominador. La nueva expresión debe ser equivalente a la que se tenía inicialmente.

Caso 1. El denominador contiene una única raíz cuadrada: multiplicar el numerador y el denominador por la misma raíz.

Ejemplo:

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}.\ 1 = \frac{8}{\sqrt{2}}.\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8.\ \sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

Caso 2. El denominador contiene una única raíz enésima del tipo $\sqrt[n]{a^m}$: multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Ejemplo:

$$\frac{3}{\sqrt[4]{7}} = \frac{3}{\sqrt[4]{7}}.\ 1 = \frac{3}{\sqrt[4]{7^1}}.\ \frac{\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^3}} = \frac{3.\ \sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^1.\ 7^3}} = \frac{3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^{1+3}}} = \frac{3\sqrt[4]{7^3}}{\sqrt[4]{7^4}} = \frac{3\sqrt[4]{7^3}}{7}$$

Caso 3. El denominador es una suma o una resta entre dos (o más) raíces cuadradas o entre un número racional y una raíz cuadrada: multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

__**Notas:**__

1) Llamamos *conjugado* de $(a + b)$ a $(a - b)$

2) Para cualesquiera a y b reales:

$(a + b) \cdot (a - b) =$

$= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b) =$

$= a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b =$

$= a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 =$

$= a^2 - b^2$

Ejemplo:

$$\frac{3}{5 - \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3}{5 - \sqrt{3}}.\ 1 =$$

$$= \frac{3}{5 - \sqrt{3}}.\ \frac{5 + \sqrt{3}}{5 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{3.\,(5 + \sqrt{3})}{(5 + \sqrt{3}) \cdot (5 - \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{3.(5+\sqrt{3})}{5^2-(\sqrt{3})^2} =$$

$$= \frac{3.(5+\sqrt{3})}{25-3} =$$

$$= \frac{3}{22}.\ (5+\sqrt{3})$$

3.6. Potenciación de exponente racional

Dado $n \in \mathbb{N}$, se define
$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Dado $n \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ definimos:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{y} \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}};\ a \neq 0$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^3}} = a^{\frac{-3}{4}}$

<u>**Nota:**</u> Todas las propiedades vistas para potencia de exponente entero las podemos generalizar a exponentes racionales.

Ejemplo:

Escribir todo como potencia y simplificar, expresar el resultado final con un radical.

$$\frac{\sqrt[3]{32}}{8} = \frac{\sqrt[3]{2^5}}{2^3} = \frac{2^{\frac{5}{3}}}{2^3} = 2^{\frac{5}{3}-3} = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{16}}$$

3.7. Práctica 4

1) Extraer factores del radical. En caso necesario, usar propiedades de la radicación.

a) $\sqrt{32}$

b) $\sqrt[3]{0,125}$

c) $\sqrt{64a^3}$

d) $\sqrt[3]{2401b^5c}$

e) $\sqrt[4]{234a^3b^7}$

f) $\sqrt{\dfrac{27c^5}{343}}$

2) Racionalizar denominadores.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

b) $-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{7+\sqrt{3}}{7\sqrt{3}}$

d) $\dfrac{9}{\sqrt[3]{2}}$

e) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5^4}}$

f) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt[5]{81b^4}}$

g) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+3}$

h) $\dfrac{-7}{5-\sqrt{3}}$

i) $\dfrac{-5}{\sqrt{10}-\sqrt{3}}$

j) $\dfrac{-3}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$

3) Escribir todo como potencia y simplificar, expresar el resultado final con radicales.

a) $\dfrac{\sqrt{25^3}.\sqrt[3]{54}}{5\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{2187}}{\sqrt[4]{3}}$

d) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

4. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

4.1. Práctica 1

1)

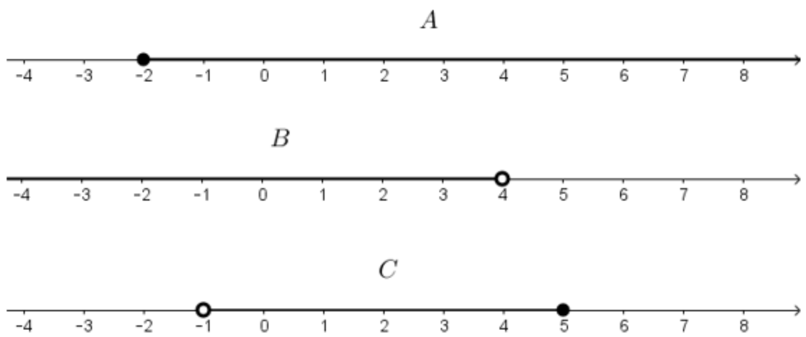
- $\{x \in A / x \in \mathbb{Z}\} = \{-8;\ 7;\ 0\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{N}\} = \{7\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{I}\} = \{\sqrt{3};\ \pi;\ -\sqrt{2}\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{Q}^{+}\} = \{7;\ \frac{89}{4};\ 15,6;\ 2,\hat{3}\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{R}_0^{+}\} = \{7;\ 0;\ \frac{89}{4};\ 15,6;\ \sqrt{3};\ 2,\hat{3};\ \pi\}$
- $\{x \in A / x \in \mathbb{Q}\} = \{-8;\ 7;\ 0;\ \frac{89}{4};\ 15,6;\ 2,\hat{3}\}$

2) a)

$A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2\} = [-2; +\infty)$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x < 4\} = (-\infty; 4)$

$C = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 5\} = (-1; 5]$



b)

i) $B \cup C = (-\infty; 5]$

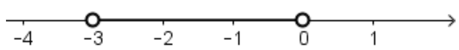
ii) $A \cap C = C$

iii) $B \cap C = (-1; 4)$

iv) $A \cap B = [-2; 4)$

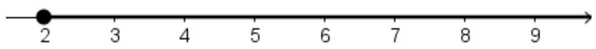
3) Expresar cada intervalo por comprensión y representar gráficamente.

a) $(-3; 0) = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 0\}$

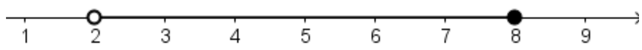


b) $[2; 8) = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x < 8\}$

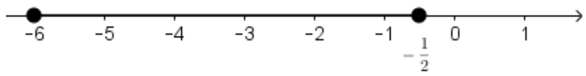
c) $[2;\infty) = \{x \in \mathbb{R}/x \geq 2\}$



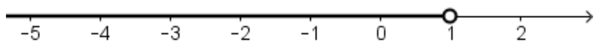
d) $(2;8] = \{x \in \mathbb{R}/2 < x \leq 8\}$



e) $[-6;-\frac{1}{2}] = \{x \in \mathbb{R}/-6 \leq x \leq -\frac{1}{2}\}$



f) $(-\infty;1) = \{x \in \mathbb{R}/x < 1\}$



4)

a)

$A = \{x \in \mathbb{R}/-1 < x \leq 3\} = (-1;3]$
$B = \{x \in \mathbb{R}/x \leq -1\} = (-\infty;-1]$
$C = \{x \in \mathbb{R}/-2 \leq x \leq 2\} = [-2;2]$

b)

i) $A \cap B = \emptyset$
ii) $A \cap C = (-1;2]$
iii) $B \cup C = (-\infty;2]$
iv) $A \cup C = [-2;3]$
v) $(A \cup B) \cap C = C$

4.2. Práctica 2

1)

a) Propiedad conmutativa de la multiplicación.
b) Propiedad asociativa de la suma.
c) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.
d) Propiedad asociativa de la suma y propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

2)

a) Propiedad conmutativa de la suma, $x+3=3+x$

b) Propiedad asociativa de la multiplicación, $7.(3.x)=(7\cdot 3)\cdot x$

c) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, $4.(a+b)=4\cdot a+4\cdot b=4a+4b$

d) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, $5x+5y=5\cdot(x+y)$

3)

a) $\frac{4}{5}+5+\frac{1}{5}=_{(1)}$

$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}+5=_{(2)}$

$=\left(\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)+5=_{(3)}$

$=\frac{1}{5}(4+1)+5=$

$=\frac{1}{5}\cdot 5+5=_{(4)}$

$=1+5=$

$=6$

b) $\frac{3}{2}-\frac{1}{7}+\frac{1}{2}+\frac{8}{7}=_{(5)}$

$=\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}+\frac{8}{7}=_{(1)}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{8}{7}=_{(2)}$

$=\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{7}+\frac{8}{7}\right)=_{(3)}$

$=\frac{1}{2}(3+1)+\frac{1}{7}(-1+8)=$

$=\frac{1}{2}\cdot 4+\frac{1}{7}\cdot 7=_{(4)}$

$=2+1=$

$=3$

c) $5 \, . \, \frac{3}{4} + 5 \, . \, \frac{1}{4} =_{(3)}$

$= 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot (3+1) =_{(6)}$

$= 5 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right) =_{(4)}$

$= 5 \cdot 1 =_{(7)}$

$= 5$

d) $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{13}{7}} =_{(8)}$

$= \frac{1}{7} \cdot \frac{7}{13} =_{(8)}$

$= \frac{1}{7} \cdot 7 \cdot \frac{1}{13} =_{(6)}$

$= \left(\frac{1}{7} \cdot 7\right) \cdot \frac{1}{13} =_{(4)}$

$= 1 \cdot \frac{1}{13} =_{(7)}$

$= \frac{1}{13}$

(1) Propiedad conmutativa de la suma
(2) Propiedad asociativa de la suma
(3) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma
(4) Existencia del elemento inverso en la multiplicación
(5) Definición de resta en $\mathbb{R}$
(6) Propiedad asociativa de la multiplicación
(7) Existencia del elemento neutro en la multiplicación
(8) Definición de división en $\mathbb{R}$

4) $3x - 3y = 27 \Rightarrow 3 \cdot (x - y) = 27 \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \cdot 3\right) \cdot (x-y) = \frac{1}{3} \cdot 27 \Rightarrow 1 \cdot (x-y) = 9 \Rightarrow x - y = 9$

5) $x + y = 5 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot (x+y) = \sqrt{2} \cdot 5 \Rightarrow \sqrt{2} \cdot x + \sqrt{2} \cdot y = 5\sqrt{2}$

6)

a) $\left(\frac{3}{2} + 5\right) \cdot 2 + \frac{1}{4} = \frac{53}{4}$

b) $\frac{3}{2} + 5 \cdot \left(2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{51}{4}$

c) $\frac{3}{2} - \left(5 \cdot 2 + \frac{1}{4}\right) = -\frac{35}{4}$

d) $\left(\frac{3}{2} - 5\right) \cdot 2 + \frac{1}{4} = -\frac{27}{4}$

4.3. Práctica 3

1)

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} =$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{3+(-2)} =$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{1} =$

$= \frac{1}{5}$

b) $\left(\frac{2}{7}\right)^{3} \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{-2} =$

$= \left(\frac{2}{7}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{2} =$

$= \left(\frac{2}{7}\right)^{3+2} =$

$= \left(\frac{2}{7}\right)^{5}$

c) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-6}\right]^{-1} =$

$= \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{3+6}\right]^{-1} =$

$= \left[\left(\frac{4^{9}}{3}\right)\right]^{-1} =$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^{9\cdot(-1)} =$

$= \left(\frac{4}{3}\right)^{-9}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (3)^{-2} + \frac{1}{2} =$

$= 3^{2} \cdot 3^{-2} + \frac{1}{2} =$

$= 3^{2+(-2)} + \frac{1}{2} =$

$= 3^{0} + \frac{1}{2} =$

$= 1 + \frac{1}{2} =$

$= \frac{3}{2}$

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$= (-1)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} =$

$= -1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3+(-3)} =$

$= -1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} =$

$= -1 \cdot 1 =$

$= -1$

f) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$

$= (-1)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$

$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4+(-4)} =$

$= 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{0} =$

$= 1 \cdot 1 =$

$= 1$

2)

a) $\frac{3^5 \,.\, 3^{-2} \,.\, 3^{-7} \,.\, 3^2}{3^{-3} \,.\, 3^2} =$

$= \frac{3^{5+(-2)+(-7)+2}}{3^{-3+2}} =$

$= \frac{3^{-2}}{3^{-1}} =$

$= 3^{-2-(-1)} =$

$= 3^{-1}$

b) $\frac{2^4 \,.\, 4^{-2} \,.\, 9^2 \,.\, 3^{-2}}{2^4 \,.\, 3} =$

$= \frac{2^4 \,.\, (2^2)^{-2} \,.\, (3^2)^2 \,.\, 3^{-2}}{2^4 \,.\, 3} =$

$= \frac{2^4 \,.\, 2^{-4} \,.\, 3^4 \,.\, 3^{-2}}{2^4 \,.\, 3} =$

$= \frac{2^{4+(-4)} \,.\, 3^{4+(-2)}}{2^4 \,.\, 3} =$

$= \frac{2^0 \cdot 3^2}{2^4 \,.\, 3} =$

$= 2^{0-4} \cdot 3^{2-1} =$

$= 2^{-4} \cdot 3^1 =$

$= 2^{-4} \cdot 3$

c) $\frac{8^2 \,.\, \left[6^2\right]^{-2}}{12^2} =$

$= \frac{(2^3)^2 \,.\, 6^{-4}}{(2^2 \cdot 3)^2} =$

$$= \frac{2^6 \cdot (2 \cdot 3)^{-4}}{2^4 \cdot 3^2} =$$

$$= \frac{2^6 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4}}{2^4 \cdot 3^2} =$$

$$= \frac{2^2 \cdot 3^{-4}}{2^4 \cdot 3^2} =$$

$$= 2^{2-4} \cdot 3^{-4-2} =$$

$$= 2^{-2} \cdot 3^{-6}$$

d) $\frac{a^4 . b . c^{-2}}{a^2 . a . b^4 . c^{-5}} =$

$$= \frac{a^4 . b . c^{-2}}{a^3 . b^4 . c^{-5}} =$$

$$= a^{4-3} . b^{1-4} . c^{-2-(-5)} =$$

$$= a \cdot b^{-3} \cdot c^3$$

e) $\frac{x^{-2} . \left[x^2\right]^3 . 3^{-2}}{x^4 . 9} =$

$$= \frac{x^{-2} \cdot x^6 \cdot 3^{-2}}{x^4 \cdot 3^2} =$$

$$= x^{-2+6-4} \cdot 3^{-2-2} =$$

$$= x^0 \cdot 3^{-4} =$$

$$= 1 \cdot 3^{-4} =$$

$$= 3^{-4}$$

f) $\frac{a^{2n+3} . b^{m+1}}{\left[a^{n+3}\right]^2 . b^{m-1}} =$

$$= \frac{a^{2n+3} \cdot b^{m+1}}{a^{2n+6} \cdot b^{m-1}} =$$

$$= a^{2n+3-(2n+6)} \cdot b^{m+1-(m-1)} =$$

$$= a^{2n+3-2n-6} \cdot b^{m+1-m+1} =$$

$$= a^{-3} \cdot b^2$$

g) $\frac{\left(5 . 3^{n+1}\right) : \left(5^2 . 3^n\right)}{5^{-1}} =$

$$= \frac{5^{1-2} \cdot 3^{n+1-n}}{5^{-1}} =$$

$$= \frac{5^{-1} \cdot 3^1}{5^{-1}} =$$

$$= 5^{-1-(-1)} \cdot 3 =$$

$$= 5^0 \cdot 3 =$$

$$= 1 \cdot 3 =$$

$$= 3$$

3)

a) $\left(\frac{4x^{-2}y^{3}}{x^{-3}y}\right)^{2} =$

$= \left(4 \cdot x^{-2-(-3)} \cdot y^{3-1}\right)^{2} =$

$= \left(4 \cdot x^{1} \cdot y^{2}\right)^{2} =$

$= 4^{2} \cdot x^{2} \cdot y^{4} =$

$= 16 \cdot x^{2} \cdot y^{4}$

b) $\left(\frac{5x^{5}y}{(5x)^{-1}y^{2}}\right)^{-2} =$

$= \left(\frac{5x^{5}y}{5^{-1}x^{-1}y^{2}}\right)^{-2} =$

$= \left(5^{1-(-1)} \cdot x^{5-(-1)} \cdot y^{1-2}\right)^{-2} =$

$= \left(5^{2} \cdot x^{6} \cdot y^{-1}\right)^{-2} =$

$= 5^{-4} \cdot x^{-12} \cdot y^{2} =$

$= \left(\frac{1}{5}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{12} \cdot y^{2}$

c) $\frac{\left(2x^{3}y\right)^{-1}}{x} =$

$= \frac{2^{-1} \cdot x^{-3} \cdot y^{-1}}{x} =$

$= 2^{-1} \cdot x^{-3-1} \cdot y^{-1} =$

$= 2^{-1} \cdot x^{-4} \cdot y^{-1} =$

$= \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{4} \cdot \left(\frac{1}{y}\right)$

d) $\frac{\left(3xyz^{-3}\right)^{2}}{\left(9x^{2}z^{-1}\right)^{-2}} =$

$= \frac{3^{2} \cdot x^{2} \cdot y^{2} \cdot z^{-6}}{3^{-4} \cdot x^{-4} \cdot z^{2}} =$

$= 3^{2-(-4)} \cdot x^{2-(-4)} \cdot y^{2} \cdot z^{-6-2} =$

$= \frac{3^{6} \cdot x^{6} \cdot y^{2}}{z^{8}}$

4.4. Práctica 4

1)

a) $4\sqrt{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $8a\sqrt{a}$

d) $7b\sqrt[3]{7b^2c}$

e) $b\sqrt[4]{234a^3b^3}$

f) $\frac{3c^2}{7}\sqrt{\frac{3c}{7}}$

2) Racionalizar denominadores.

a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

b) $-\frac{5\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{7\sqrt{3}+3}{21}$

d) $\frac{9\sqrt[3]{4}}{2}$

e) $\frac{\sqrt[3]{25}}{25}$

f) $\frac{\sqrt{5}\sqrt[5]{3b}}{3b}$

g) $-\frac{\sqrt{2}-3}{7}$

h) $\frac{-7(5+\sqrt{3})}{22}$

i) $\frac{-5(\sqrt{10}+\sqrt{3})}{7}$

j) $\frac{-3(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{4}$

3)

a) $25\sqrt[3]{2}\sqrt{3}$

b) 2

c) $3\sqrt{3}$

d) $\sqrt[4]{8}$

Expresiones algebraicas

Tabla de contenidos

1. Qué son las expresiones algebraicas

Una expresión es algebraica si en ella aparecen letras (variables) y números (coeficientes) relacionados por las operaciones de suma, diferencia, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos:

a) $x^4 + 3x^3 - x \quad \leftarrow$ expresión algebraica de variable x

b) $\sqrt[3]{a} + 3a^2 \quad \leftarrow$ expresión algebraica de variable a

c) $v - w \quad \leftarrow$ expresión algebraica de variables v e w

d) $xy^2 - \dfrac{\sqrt{x}}{y} \quad \leftarrow$ expresión algebraica de variables x e y

Las expresiones algebraicas son útiles a la hora de formular en "lenguaje matemático" distintas situaciones. Por ejemplo, las usamos para hacer generalizaciones, escribir fórmulas o plantear ecuaciones. Veamos algunos ejemplos:

a) Si n es un número entero, $2 \cdot n$ es la forma general de un número par.

b) Si consideramos un triángulo cuya base mide b y cuya altura con respecto a dicha base mide h resulta que $\dfrac{b \cdot h}{2}$ es la fórmula que permite calcular su área.

c) Si la diferencia entre dos números es 5, llamando a y b a dichos números, podemos escribir $a - b = 5$.

2. Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene al sustituir cada variable por un número y realizar las operaciones indicadas.

Ejemplo:

El valor numérico de $3x + 7x^2 - 1$ en $x = -2$ es 21 pues $3 \cdot (-2) + 7 \cdot (-2)^2 - 1 = 21$

2.1. Práctica 1

1) Asociar cada enunciado con la expresión algebraica correspondiente.

a) Cinco menos que el doble de un número	$(a-b)^2$
b) Cinco menos el doble de un número	$2a-5$
c) La diferencia de dos cuadrados	$\frac{a+b}{2}$
d) El cuadrado de la diferencia de dos números	a^2-b^2
e) La mitad de la suma de dos números	$5-2a$

2) Evalúa las siguientes expresiones para el valor o los valores dados:

a) $2w-1$ cuando $w=4$

b) $3y^2-5y$ cuando $y=-1$

c) $2(x-5)^3+(2x)^{-1}$ cuando $x=2$

d) $5z-(z-1)^2$ cuando $z=-1$

e) $-2t^3+3t^2-1$ cuando $t=2$

f) $5(-u+2)^2-(u-1)+2u^{-1}$ cuando $u=\frac{1}{2}$

3. Operaciones

Trabajaremos con la suma, resta y multiplicación de expresiones algebraicas.

3.1. Suma y resta

Suma y resta de expresiones algebraicas

Dos términos son **semejantes** cuando tienen la misma parte literal, esto es, las mismas letras elevadas a iguales exponentes.

Ejemplos:

a) $2x$ y $-\frac{5}{4}x$ son términos semejantes, su parte literal es x.

b) $9y$ y $\frac{3}{7}$ no son términos semejantes, en la primera expresión la parte literal es y y la segunda no tiene parte literal.

c) $2v^2$ y $-\frac{5}{4}v$ no son términos semejantes, en la primera expresión la parte literal es v^2 y en la segunda es v.

Al **sumar** o **restar** expresiones algebraicas se debe tener en cuenta que sólo se pueden sumar o restar términos semejantes, para esto, se suman o restan los coeficientes y se conserva la parte literal. La suma y resta de términos recibe el nombre de **reducción**.

Ejemplos:

a) $\frac{5}{3}x + 4x = \left(\frac{5}{3} + 4\right)x = \frac{17}{3}x$

b) $-\frac{5}{3}a^2 + 4a^2 = (-\frac{5}{3} + 4)a^2 = \frac{7}{3}a^2$

c) $(7x^2 + 5x - 2) + (x^2 - 2x + 6) =$

$= 7x^2 + x^2 + 5x - 2x + (-2) + 6 =$

$= (7 + 1)x^2 + (5 - 2)x + (-2) + 6 =$

$= 8x^2 + 3x + 4$

d) $\frac{5}{3}y^3 - 4y^3 = (\frac{5}{3} - 4)y^3 = -\frac{7}{3}y^3$

e) $-\frac{5}{3}w^5 - 4w^5 = (-\frac{5}{3} - 4)w^5 = -\frac{17}{3}w^5$

f) $(7x^2 + 5x - 2) - (x^2 - 2x + 6) =$

$= 7x^2 + 5x - 2 - x^2 + 2x - 6 =$

$= (7 - 1)x^2 + (5 + 2)x + (-2 - 6) =$

$= 6x^2 + 7x - 8$

3.2. Multiplicación

Caso 1

Para multiplicar dos (o más) expresiones algebraicas que consten de un solo término debemos multiplicar coeficientes con coeficientes y partes literales con partes literales, para esto último recurrimos a las propiedades de la potenciación.

Ejemplo:

$$(2x^3) \cdot (\frac{1}{5}x^5) = 2 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{5} \cdot x^5 = (2 \cdot \frac{1}{5}) \cdot (x^3 \cdot x^5) = \frac{2}{5}x^8$$

Caso 2

Para multiplicar dos (o más) expresiones algebraicas que consten de más de un término debemos aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma y luego, en cada término, realizar las multiplicaciones de acuerdo a lo visto en el **Caso 1**.

Ejemplo:

$$(2x + 3) \cdot (-x + \sqrt{2}) =$$

$$= (2x + 3) \cdot (-x) + (2x + 3) \cdot \sqrt{2} =$$

$$= 2x \cdot (-x) + 3 \cdot (-x) + 2x \cdot \sqrt{2} + 3 \cdot \sqrt{2} =$$

$$= -2x^2 - 3x + 2\sqrt{2}x + 3\sqrt{2} =$$

$$= -2x^2 + (-3 + 2\sqrt{2})x + 3\sqrt{2}$$

3.3. Productos especiales

BINOMIO AL CUADRADO $\leftrightarrow$ TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$\underset{binomio\ al\ cuadrado}{\underset{\uparrow}{(x+y)^2}} = \underset{trinomio\ cuadrado\ perfecto}{\underset{\uparrow}{x^2+2xy+y^2}}$$

Lo enunciado arriba es válido para cualquier par de valores reales x e y. Lo demostraremos:

$(x+y)^2 = (x+y).\,(x+y) \underset{(1)}{=}$

$= (x+y).\,x + (x+y).\,y \underset{(1)}{=} x\cdot x + y\cdot x + x\cdot y + y\cdot y \underset{(2)}{=}$

$= x^2 + xy + xy + y^2 \underset{(3)}{=}$

$= x^2 + (xy+xy) + y^2 =$

$= x^2 + 2xy + y^2$

(1) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
(2) Propiedad conmutativa de la multiplicación.
(3) Propiedad asociativa de la suma.

Ejemplos:

a) $(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

b) $(x-3)^2 = (x+(-3))^2 = x^2 + 2\cdot(-3)\cdot x + (-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

c) $(5x-3y)^2 = (5x)^2 - 2\cdot 5x\cdot 3y + (3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$

d) $(x+6)^2 + x.\,(x+2) =$

$= (x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2) + (x^2 + 2x) =$

$= x^2 + 12x + 36 + x^2 + 2x =$

$= 2x^2 + 14x + 36$

BINOMIO AL CUBO $\leftrightarrow$ CUATRINOMIO CUBO PERFECTO

$$\underset{binomio\ al\ cubo}{\underset{\uparrow}{(x+y)^3}} = \underset{cuatrinomio\ cubo\ perfecto}{\underset{\uparrow}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}}$$

Lo enunciado arriba es válido para cualesquiera valores reales x e y. Lo demostraremos:

$(x+y)^3 = (x+y)^2.\,(x+y) \underset{(1)}{=}$

$= (x+y)^2 . x + (x+y)^2 . y \underset{(2)}{=}$

$= (x^2 + 2xy + y^2) . x + (x^2 + 2xy + y^2) . y \underset{(1)}{=}$

$= x^2 \cdot x + 2xy \cdot x + y^2 \cdot x + x^2 \cdot y + 2xy \cdot y + y^2 \cdot y \underset{(3)(4)}{=}$

$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 \underset{(5)(6)}{=}$

$= x^3 + (2x^2y + x^2y) + (xy^2 + 2xy^2) + y^3 =$

$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

(1) Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma.
(2) Binomio al cuadrado.
(3) Definición potencia.
(4) Propiedad conmutativa del producto.
(5) Propiedad conmutativa de la suma.
(6) Propiedad asociativa de la suma.

Ejemplos:

a) $(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $(x-2)^3 = (x + (-2))^3 = x^3 + 3x^2 \cdot (-2) + 3x \cdot (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

c) $(x-y)^3 = (x + (-y))^3 = x^3 + 3x^2 \cdot (-y) + 3x \cdot (-y)^2 + (-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

DIFERENCIA DE CUADRADOS $\leftrightarrow$ PRODUCTO DE LA DIFERENCIA POR LA SUMA

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{diferencia de} \\ \textit{cuadrados}}}{x^2 - y^2} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{producto de la diferencia} \\ \textit{por la suma de } x \textit{ e } y}}{(x-y).(x+y)}$$

Lo enunciado arriba es válido para cualesquiera valores reales x y y. Lo demostramos:

$(x-y).(x+y) = (x-y).x + (x-y).y = x.x - y.x + x.y - y.y = x^2 - y^2$

Ejemplos:

a) $(x-3).(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

b) $(x+5).(x-5) = x^2 - 5^2 = x^2 - 25$

c) $(x+\sqrt{5}).(x-\sqrt{5}) = x^2 - \sqrt{5}^2 = x^2 - 5$

d) $(x+1)^2 - (x-2).(x+2) = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4 = 2x + 5$

e) $x - 2 + x^4 - 4x^2 =$

$= (x-2) + (x^4 - 4x^2) =$

$= (x-2) + x^2.(x^2 - 4) =$

$= (x-2) + x^2.(x-2).(x+2) =$

$$= (x-2).(1+x^2.(x+2)) =$$

$$= (x-2).(1+x^3+2x^2)$$

3.4. Práctica 2

1) Resolver las siguientes sumas y restas.

a) $x^4 - 3x^4 - 2x^4 + 8x^4$

b) $-\frac{1}{2}y + \frac{3}{5}y - \frac{1}{3}y$

c) $-5x^2 + x - 3 + x^2 + 2x^4 + 2$

d) $ab^2 + 7ab + 2a + 4ab^2 - 3ab$

e) $x^3 + 4x^5 - 6x^3 + x^5$

2) Resolver las siguientes multiplicaciones.

a) $-3x^3.(-9x^2)$

b) $\frac{1}{3}x^5.(-6x)$

c) $-\frac{2}{5}y^2.(-5y).(-\frac{1}{2}y^3)$

d) $0,\hat{3}x.(-\frac{2}{3}x^2)^2$

e) $-2x.(\frac{1}{4}x^2y).6y^3$

f) $4ab.(-3a^3bc^2)$

3) Transformar en suma los siguientes productos aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

a) $x^2.(5x + 3y)$

b) $3xy.(x + 5)$

c) $x.(3x + 6y) + y.(5x + 2y)$

d) $5x.(x^2y + 6y) + 3x.(xy + 2y)$

e) $6x.(x - 3)$

f) $(2 + x).(y + 5)$

g) $(-4 + x).(2y - 1).3x$

4) Resolver los siguientes productos especiales.

a) $(x + \sqrt{3})^2$

b) $(-x - 5)^2$

c) $(\frac{1}{2} + 2x)^2$

d) $(a^3 - a)^2$

e) $(x + 5)^3$

f) $(x - 5)^3$

g) $(3x^2 + \frac{1}{3})^3$

h) $(-2y^2 + z)^3$

i) $(x - 1).(x + 1)$

j) $(-4m + 3).(-4m - 3)$

k) $(x^3 - 2y).(x^3 + 2y)$

5) Resolver hasta obtener la mínima expresión.

a) $(-5).\left(7 + \frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x$

b) $3x.(x - 5y) + y.(x + 3y)$

c) $x - (3 - x)$

d) $5.(x - 2) - x.(3 + x)$

e) $(x - 2).(x + 2) + (x + 2)^2$

f) $(x - 1)^2 - x.(x + 3)$

g) $2.(x - 1)^2 + 3x^2$

h) $[2.(x - 1)]^2 + (3x)^2$

i) $5.(x + 2)^3 + 5x.(x^2 - 1)$

j) $2.(x - 5)^2 + (x - 1).(x + 1)$

k) $x.y.(x - y) + 3.(x - y)^2.x$

l) $5\sqrt{2}.(\sqrt{2}x + 3) - (3 - \sqrt{2})^2$

m) $(x - 1)^3 + (x - 1).(x + 1) - 3.(x^2 - 1)$

n) $(-3) \cdot \left(x - \frac{3}{2}x^2\right) - \left(\frac{5}{4}x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{9}$

4. Factorización

Factorizar o factorear una expresión algebraica formada por sumas y/o restas es el proceso de transformar dicha expresión en otra equivalente expresada como el producto de dos o más factores.

Existen diferentes métodos para factorizar un expresión algebraica. En este capítulo veremos los siguientes:

- Extracción de factor común
- Extracción de factor común por grupos
- Trinomio cuadrado perfecto
- Cuatrinomio cubo perfecto
- Diferencia de cuadrados

4.1. Extracción de factor común

Se aplica cuando en todos los términos hay un "factor común", esto es, cuando hay uno o más números, letras o expresiones que aparecen en todos y cada uno de los términos de la expresión a factorizar.

La extracción de dicho factor común se hace aplicando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$\underset{\text{factor común}}{\overleftarrow{\overset{\text{distributiva}}{\overrightarrow{a.(b+c)=a.b+a.c}}}}$$

Ejemplos:

1) $4a-2b=2^2a-2b=2\cdot 2\cdot a-2\cdot b=2\cdot(2a-b)=2(2a-b)$

2) $x-y=(-1)\cdot(-x+y)=-(-x+y)$

3) $\frac{4}{3}y-\frac{8}{9}=\frac{4}{3}\cdot y-\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\cdot(1\cdot y-\frac{2}{3})=\frac{4}{3}\cdot(y-\frac{2}{3})=\frac{4}{3}(y-\frac{2}{3})$

4) $7x^3+3x^4-x^8=7x^3+3x\cdot x^3-x^5\cdot x^3=x^3(7+3x-x^5)$

5) $16a^3b^7c-12a^5b^2c^3=4\cdot 4a^3b^2b^5c-4\cdot 3a^3a^2b^2cc^2=4a^3b^2c(4b^5-3a^2c^2)$

4.2. Extracción de factor común por grupos

Se aplica cuando en la expresión algebraica es posible agrupar términos que comparten un factor común y luego extraer ese factor común de cada grupo. Cabe destacar que es condición necesaria para aplicar este caso que la cantidad de términos de la expresión sea un número compuesto.

Ejemplos:

a) $3x^2y - 6y + 2x^2 - 4 =_{(1)} (3x^2y - 6y) + (2x^2 - 4) =_{(2)}$

$= 3y(x^2 - 2) + 2(x^2 - 2) =_{(3)} (x^2 - 2)(3y + 2)$

(1) De los cuatro términos de la expresión dada, se identifican dos pares de términos (dos grupos) en cada uno de los cuales se reconoce un factor común. Aplicando la propiedad asociativa de la suma se agrupan los mencionados términos.

- Grupo 1: $3x^2y - 6y$ cuyo factor común es $3y$
- Grupo 2: $2x^2 - 4$ cuyo factor común es 2

(2) Cada grupo se factoriza extrayendo el correspondiente factor común.

- Grupo 1: $3x^2y - 6y = 3y(x^2 - 2)$
- Grupo 2: $2x^2 - 4 = 2(x^2 - 2)$

(3) De los dos términos resultantes se extrae el factor común $(x^2 - 2)$.

b) $x^6 + 2\sqrt{2}x^5 + x^4 + \sqrt{8}x^3 + 2x + \sqrt{32} =$

$= x^6 + 2\sqrt{2}x^5 + x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + 2x + 4\sqrt{2} =$

$= (x^6 + 2\sqrt{2}x^5) + (x^4 + 2\sqrt{2}x^3) + (2x + 4\sqrt{2}) =$

$= x^5(x + 2\sqrt{2}) + x^3(x + 2\sqrt{2}) + 2(x + 2\sqrt{2}) =$

$= (x^5 + x^3 + 2)(x + 2\sqrt{2}) =$

4.3. Trinomio cuadrado perfecto

Se aplica en aquellas expresiones de tres términos (trinomios) que pueden escribirse como el cuadrado de un binomio:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ binomio\ al\ cuadrado}}{(x+y)^2} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ trinomio\ cuadrado\ perfecto}}{x^2+2xy+y^2}$$

Como no todo trinomio es un cuadrado perfecto, lo primero que debe hacerse es determinar si la expresión a factorizar corresponde o no a este caso. Para ello se identifican dos términos que sean cuadrados perfectos, de ellos se extraen las raíces cuadradas (sin tener en cuenta el signo) y se verifica que el término restante del trinomio sea igual al doble producto de dichas raíces, sin tomar en cuenta el signo. Una vez realizada la comprobación, la factorización se escribe como un binomio elevado al cuadrado cuyos términos son las raíces cuadradas obtenidas y el signo del binomio es el del término restante del trinomio.

Ejemplos:

a) Factorizar: $x^2+10x+25$

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{x^2}=x,\quad \sqrt{25}=5$ y $2\cdot x\cdot 5=10x$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $x^2+10x+25=(x+5)^2$

b) Factorizar: $y^2+25-10y$

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{y^2}=y,\quad \sqrt{25}=5$ y $2\cdot y\cdot 5=10y$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $y^2+25-10y=(y-5)^2$

c) Factorizar: $x^2+2xy+y^2$

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{x^2}=x,\quad \sqrt{y^2}=y$ y $2\cdot x\cdot y=2xy$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

d) Factorizar: a^8-12a^4+36

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{a^8}=a^4,\quad \sqrt{36}=6$ y $2\cdot a^4\cdot 6=12a^4$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $a^8-12a^4+36=(a^4-6)^2$

e) Factorizar: $\frac{4}{9}x^4+\frac{9}{16}-x^2$

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{\frac{4}{9}x^4}=\frac{2}{3}x^2,\quad \sqrt{\frac{9}{16}}=\frac{3}{4}$ y $2\cdot\frac{2}{3}x^2\cdot\frac{3}{4}=x^2$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $\frac{4}{9}x^4+\frac{9}{16}-x^2=\left(\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}\right)^2$

f) Factorizar: $5m^4+2\sqrt{10}m^2+2$

Es un trinomio pues tiene tres términos. Además: $\sqrt{5m^4}=\sqrt{5}m^2,\quad \sqrt{2}=\sqrt{2}$ y $2\cdot\sqrt{5}m^2\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{10}m^2$

Luego, es un trinomio cuadrado perfecto. Resulta: $5m^4+2\sqrt{10}m^2+2=(\sqrt{5}m^2+\sqrt{2})^2$

A veces el trinomio no es cuadrado perfecto, pero la expresión se puede simplificar de todas maneras. Por ejemplo:

$$x^2-3xy+y^2$$

no es un trinomio cuadrado perfecto porque $3xy$ no es el doble producto de $\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}=xy$

Pero podemos escribir:

$$x^2 - 3xy + y^2 = x^2 - 2xy - xy + y^2 = (x^2 - 2xy + y^2) - xy = (x - y)^2 - xy$$

Esta no es la única forma de reescribir esta expresión. También podría ser:

$$x^2 - 3xy + y^2 = x^2 + 2xy - 5xy + y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) - 5xy = (x + y)^2 - 5xy$$

Suele ser útil *completar cuadrados*, es decir sumar y restar a la expresión un término que permita armar un trinomio cuadrado perfecto. Por ejemplo:

$$x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x - 1 + 2 - 2 = (x^2 - 2x + 1) - 2 = (x - 1)^2 - 2$$

4.4. Cuatrinomio cubo perfecto

Se aplica en aquellas expresiones de cuatro términos (cuatrinomios) que pueden escribirse como el cubo de un binomio:

$$\underset{binomio\ al\ cubo}{\underset{\uparrow}{(x+y)^3}} \quad = \underset{cuatrinomio\ cubo\ perfecto}{\underset{\uparrow}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}}$$

Como no todo cuatrinomio es un cubo perfecto, lo primero que debe hacerse es determinar si la expresión a factorizar corresponde o no a este caso. Para ello se identifican dos términos que sean cubos perfectos, de ellos se extraen las raíces cúbicas y se verifica que de los términos restantes del cuatrinomio uno es el triple del cuadrado de la base del primer cubo por la base del segundo, y el otro término es el triple de la base del primer cubo por el cuadrado de la base del segundo cubo. Una vez realizada la comprobación, la factorización se escribe como un binomio elevado al cubo cuyos términos son las raíces cúbicas obtenidas.

Ejemplos:

a) Factorizar: $x^3+6x^2+12x+8$

Es un cuatrinomio pues tiene cuatro términos. Además: $\sqrt[3]{x^3}=x,\ \ \sqrt[3]{8}=2,\ \ 3\cdot x^2\cdot 2=6x^2$ y $3\cdot x\cdot 2^2=12x$

Luego, es un cuatrinomio cubo perfecto. Resulta: $x^3+6x^2+12x+8=(x+2)^3$

b) Factorizar: $y^3-8+12y-6y^2$

Es un cuatrinomio pues tiene cuatro términos. Además: $\sqrt[3]{y^3}=y,\ \ \sqrt[3]{-8}=-2,\ \ 3\cdot y^2\cdot(-2)=-6y^2$ y $3\cdot y\cdot(-2)^2=12y$

Luego, es un cuatrinomio cubo perfecto. Resulta: $y^3-8+12y-6y^2=(y-2)^3$

c) Factorizar $a^9+9a^6+27+27a^3$

Es un cuatrinomio pues tiene cuatro términos. Además: $\sqrt[3]{a^9}=a^3,\ \ \sqrt[3]{27}=3,\ \ 3\cdot(a^3)^2\cdot 3=9a^6$ y $3\cdot a^3\cdot 3^2=27a^3$

Luego, es un cuatrinomio cubo perfecto. Resulta: $a^9+9a^6+27+27a^3=(a^3+3)^3$

d) Factorizar $\frac{1}{8}x^6+\frac{15}{4}x^4+125+\frac{75}{2}x^2$

Es un cuatrinomio pues tiene cuatro términos. Además: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}x^6}=\frac{1}{2}x^2,\ \ \sqrt[3]{125}=5,\ \ 3\cdot(\frac{1}{2}x^2)^2\cdot 5=\frac{15}{4}x^4$ y $3\cdot\frac{1}{2}x^2\cdot 5^2=\frac{75}{2}x^2$

Luego, es un cuatrinomio cubo perfecto. Resulta: $\frac{1}{8}x^6+\frac{15}{4}x^4+125+\frac{75}{2}x^2=\left(\frac{1}{2}x^2+5\right)^3$

4.5. Diferencia de cuadrados

Se aplica para factorizar expresiones algebraicas de la forma $x^2 - y^2$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \textit{diferencia de} \\ \textit{cuadrados}}}{x^2 - y^2} \quad = \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \textit{producto de la diferencia} \\ \textit{por la suma de } x \textit{ e } y}}{(x-y).(x+y)}$$

Ejemplos:

a) $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = (a+3)(a-3)$

b) $16x^2 - 9y^2 = 4^2x^2 - 3^2y^2 = (4x)^2 - (3y)^2 = (4x+3y)(4x-3y)$

4.6. Práctica 3

1) Extraer factor común.

a) $6x^5 - 6x^4 + 2x^3$

b) $\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{49}x$

c) $xy^2 - 3xy + 6x^2y^3$

d) $3x^5 - \frac{3}{5}x + 6$

e) $\frac{9}{4}x^9yz^2 + 3x^8y^2z - \frac{15}{2}x^5z^3$

2) Extraer factor común por grupos.

a) $x^4 - x^3 + 2x - 2$

b) $3a^2 - 7b^2x + 3ax - 7ab^2$

c) $2x^5 + 4x^3 - x^2 - 2$

d) $\frac{3}{2}x^6 - 3x^5 - 2x + 4$

e) $2x^3 - nx^2 + 2xz^2 - nz^2 - 3ny^2 + 6xy^2$

3) Expresar cada trinomio cuadrado perfecto como el cuadrado de un binomio.

a) $x^2 + 10x + 25$

b) $9x^2 - 12x + 4$

c) $\frac{1}{9}x^{10} + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{4}$

d) $16t^6 - 2t^4 + \frac{1}{16}t^2$

e) $\frac{1}{4}x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4$

4) Expresar cada cuatrinomio cubo perfecto como el cubo de un binomio.

a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

b) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$

c) $8y^3 + 36y^2x^3 + 54yx^6 + 27x^9$

d) $\frac{1}{8}a^6 + \frac{3}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^2 + 1$

e) $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^4 + x^5 + x^6$

5) Expresar cada diferencia de cuadrados como un producto.

a) $x^2 - 9$

b) $100x^4 - 256y^2$

c) $x^6 - \frac{1}{36}$

d) $9x^2 - 5$

e) $4m^8n^6 - 1$

6) Transformar en producto (factorizar).

a) $2x^3 - 50x$

b) $3x^3 - 12x^2 + 12x$

c) $-x^3 - 2x^2 - x$

d) $x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4$

e) $x^3 - 3x^2 - x + 3$

f) $x^4y + 3x^3y + 3x^2y + xy$

g) $x^3 - x + (x^2y - 2xy + y)$

h) $5x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 20x^2 - \frac{40}{3}x$

5. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

5.1. Práctica 1

1)

a) Cinco menos que el doble de un número: $2a - 5$

b) Cinco menos el doble de un número: $5 - 2a$

c) La diferencia de dos cuadrados: $a^2 - b^2$

d) El cuadrado de la diferencia de dos números: $(a - b)^2$

e) La mitad de la suma de dos números: $\dfrac{a+b}{2}$

2)

a) $2 \cdot 4 - 1 = 7$

b) $3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 3 \cdot 1 + 5 = 3 + 5 = 8$

c) $2(2-5)^3 + (2 \cdot 2)^{-1} = 2 \cdot (-3)^3 + 4^{-1} = -54 + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{215}{4}$

d) $5 \cdot (-1) - (-1-1)^2 = -5 - (-2)^2 = -5 - 4 = -9$

e) $-2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 - 1 = -2 \cdot 8 + 3 \cdot 4 - 1 = -16 + 12 - 1 = -5$

f) $5 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} + 2\right)^2 - \left(\dfrac{1}{2} - 1\right) + 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} =$

$= 5 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - \left(-\dfrac{1}{2}\right) + 2 \cdot 2 =$

$= 5 \cdot \dfrac{9}{4} + \dfrac{1}{2} + 4 =$

$= \dfrac{45}{4} + \dfrac{1}{2} + 4 =$

$= \dfrac{63}{4}$

5.2. Práctica 2

1)

a) $4x^4$

b) $-\frac{7}{30}y$

c) $2x^4 - 4x^2 + x - 1$

d) $5ab^2 + 4ab + 2a$

e) $5x^5 - 5x^3$

2)

a) $27x^5$

b) $-2x^6$

c) $-y^6$

d) $\frac{4}{27}x^5$

e) $-3x^3y^4$

f) $-12a^4b^2c^2$

3)

a) $5x^3 + 3x^2y$

b) $3x^2y + 15xy$

c) $3x^2 + 11xy + 2y^2$

d) $5x^3y + 36xy + 3x^2y$

e) $6x^2 - 18x$

f) $2y + 10 + xy + 5x$

g) $-24xy + 12x + 6x^2y - 3x^2$

4)

a) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$

b) $x^2 + 10x + 25$

c) $\frac{1}{4} + 2x + 4x^2$

d) $a^6 - 2a^4 + a^2$

e) $x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

f) $x^3 - 15x^2 + 75x - 125$

g) $27x^6 + 9x^4 + x^2 + \dfrac{1}{27}$

h) $-8y^6 + 12y^4z - 6y^2z^2 + z^3$

i) $x^2 - 1$

j) $16m^2 - 9$

k) $x^6 - 4y^2$

5)

a) $-35 - x$

b) $3x^2 - 14xy + 3y^2$

c) $2x - 3$

d) $-x^2 + 2x - 10$

e) $2x^2 + 4x$

f) $-5x + 1$

g) $5x^2 - 4x + 2$

h) $13x^2 - 8x + 4$

i) $10x^3 + 30x^2 + 55x + 40$

j) $3x^2 - 20x + 49$

k) $-5x^2y + 2xy^2 + 3x^3$

l) $10x + 21\sqrt{2} - 11$

m) $x^3 - 5x^2 + 3x + 1$

n) $\dfrac{47}{16}x^2 - \dfrac{13}{6}x$

5.3. Práctica 3

1)

a) $2x^3(3x^2 - 3x + 1)$

b) $\frac{1}{7}x\left(x - \frac{1}{7}\right)$

c) $xy(y - 3 + 6xy^2)$

d) $3\left(x^5 - \frac{1}{5}x + 2\right)$

e) $3x^5z\left(\frac{3}{4}x^4yz + x^3y^2 - \frac{5}{2}z^2\right)$

2)

a) $(x^3 + 2)(x - 1)$

b) $(3a - 7b^2)(a + x)$

c) $(2x^3 - 1)(x^2 + 2)$

d) $\left(\frac{3}{2}x^5 - 2\right)(x - 2)$

e) $(x^2 + z^2 + 3y^2)(2x - n)$

3)

a) $(x + 5)^2$

b) $(3x - 2)^2$

c) $\left(\frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{2}\right)^2$

d) $\left(4t^3 - \frac{1}{4}t\right)^2$

e) $\left(\frac{1}{2}x^2y - xy^2\right)^2$

4)

a) $(x + 2)^3$

b) $(x - 3)^3$

c) $(2y + 3x^3)^3$

d) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 1\right)^3$

e) $\left(\frac{1}{3}x + x^2\right)^3$

5)

a) $(x-3)(x+3)$

b) $(10x^2-16y)(10x^2+16y)$

c) $\left(x^3-\dfrac{1}{6}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{6}\right)$

d) $(3x-\sqrt{5})(3x+\sqrt{5})$

e) $(2m^4n^3-1)(2m^4n^3+1)$

6) Tener en cuenta que en algunos casos es posible más de una forma de factorizar

a) $2x(x-5)(x+5)$

b) $3x(x-2)^2$

c) $-x(x+1)^2$

d) $(x^3-1)(x+2)^2$

e) $(x-1)(x+1)(x-3)$

f) $xy(x+1)^3$

g) $(x^2+x+xy-y)(x-1)$

h) $5x\left(x+\dfrac{2}{3}\right)(x-2)(x+2)$

Ecuaciones e inecuaciones

Tabla de contenidos

1. Ecuaciones

Una ***ecuación en una incógnita*** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas:

$P(x) = Q(x)$ (*)

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones algebraicas cuya variable es x, por lo que decimos que la ecuación (*) tiene incógnita x.

Una ***solución*** de una ecuación es un valor de la incógnita que hace cierta la igualdad.

El ***conjunto solución*** será aquel formado por todas las soluciones.

Resolver una ecuación es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que verifican la ecuación.

2. Ecuaciones lineales

Diremos que una ecuación en una incógnita es ***lineal*** cuando se puede escribir de la forma:

$a \cdot x + b = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$

Los números a y b son los ***coeficientes*** y x la ***incógnita***.

2.1. Resolución de ecuaciones lineales

Para resolver una ecuación lineal, si es necesario, usamos las propiedades de la suma y de la multiplicación de números para transformar las expresiones algebraicas a ambos lados de la igualdad y luego utilizamos la propiedad uniforme de la suma y/ o de la multiplicación para despejar la incógnita.

Ejemplos:

1) Resolver $3x-6=9$

$3x-6+6=9+6 \;\leftarrow$ Sumar 6 a ambos lados de la igualdad
$3x=15$
$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 15 \quad\leftarrow$ Multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos lados de la igualdad
$x=5$
El conjunto solución es: $S=\{5\}$

Podemos verificar si una solución es correcta sustituyendo este valor en la expresión algebraica:
$3\cdot 5-6=15-6=9$

2) Resolver $2x+7=-x+49$

$2x+7+x=-x+49+x \;\leftarrow$ Sumar x a ambos lados de la igualdad
$(2x+x)+7=(-x+x)+49 \;\leftarrow$ Conmutar y asociar
$3x+7=49$
$3x+7+(-7)=49+(-7) \;\leftarrow$ Sumar (-7) a ambos lados de la igualdad
$3x=42$
$\frac{1}{3}\cdot 3x=\frac{1}{3}\cdot 42 \;\leftarrow$ Multiplicar por $\frac{1}{3}$ ambos lados de la igualdad
$x=14$
El conjunto solución es: $S=\{14\}$

Verificamos:

$2\cdot 14+7=35=-14+49$

3) Resolver $\frac{1}{2}x+2=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot x+1\right)$

$\frac{1}{2}x+2=2\cdot\frac{1}{4}x+2\cdot 1 \;\leftarrow$ Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma
$\frac{1}{2}x+2+(-2)=\frac{1}{2}x+2+(-2) \;\leftarrow$ Sumar -2 ambos miembros
$\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$
$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x \;\leftarrow$ Sumar $-\frac{1}{2}$ ambos miembros
$0\cdot x=0\cdot x \;\leftarrow$ El producto de un número por cero es cero
$0=0$
Esta igualdad se verifica para cualquier valor de x real. Por lo tanto esta ecuación tiene infinitas soluciones.
El conjunto solución estará formado por todos los números reales: El conjunto solución es: $S=\mathbb{R}$

En este caso es imposible verificar la igualdad para los infinitos valores del conjunto solución. Se puede probar que distintos números reales (positivos, negativos, cero) la satisfacen:

$$\frac{1}{2}\cdot 1+2=\frac{5}{2}=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot 1+1\right)$$

$$\frac{1}{2}\cdot(-2)+2=1=2\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot(-2)+1\right)$$

$\frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 0 + 1\right)$

4) Resolver $2x + 5 - x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x + 3\right)$

$x + 5 = 2 \cdot \frac{1}{2}x + 2 \cdot 3$ $\leftarrow$ Aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma
$x + 5 = x + 6$
$x + 5 + (-6) = x + 6 + (-6)$ $\leftarrow$ Sumar -6 ambos miembros
$x - 1 = x$
$x - 1 + (-x) = x + (-x)$ $\leftarrow$ Sumar $-x$ ambos miembros
$-1 + 0 \cdot x = 0 \cdot x$ $\leftarrow$ El producto de un número por cero es cero
$-1 = 0$
Esta igualdad nunca es cierta. Por lo tanto esta ecuación no tiene solución.
El conjunto solución es: $S = \emptyset$

En relación al conjunto solución, al resolver ecuaciones en una incógnita lineales podremos encontrarnos con uno de tres casos posibles:

- el conjunto solución tiene sólo un elemento, es unitario. (ejemplos 1 y 2)
- el conjunto solución tiene infinitos elementos. (ejemplo 3)
- el conjunto solución no tiene elementos, es vacío. (ejemplo 4)

2.2. Práctica 1

1) Determinar si el valor dado es una solución de la ecuación:

a) $4x + 7 = 9x - 3$ **(i)** $x = -2$ **(ii)** $x = 2$

b) $1 - [2 - (3 - x)] = 4x - (6 + x)$ **(i)** $x = 2$ **(ii)** $x = 4$

c) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = 1$ **(i)** $x = 2$ **(ii)** $x = 4$

2) Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $3x - 8 = 1$

b) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$

c) $4(-3x + 9) = 1 - 12x$

d) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}(x - 3) = \dfrac{x+1}{4}$

e) $x - \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}x - 5 = 0$

f) $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{4} = 6x$

g) $\dfrac{5x-4}{2} - \dfrac{3+2x}{3} = 1$

h) $(-0,75x + 1,5)\dfrac{2}{3} = -3\left(-\dfrac{2}{9}x + \dfrac{4}{9}\right)$

3. Las ecuaciones lineales para representar situaciones concretas

Supongamos que queremos resolver el siguiente problema:

Una compañía de alquiler de autos establece una tarifa fija de $\$18000$ *por día para alquilar un auto, más* $\$350$ *por kilómetro recorrido. Helena alquiló un auto por dos días y su cuenta llegó a* $\$78000$*. ¿Cuántos kilómetros recorrió?*

Formalmente tenemos que establecer una representación matemática que nos permita resolverlo, lo cual implica varios pasos.

En primer lugar, ***identificar la incógnita del problema***. Como queremos determinar la cantidad de kilómetros que recorrió Helena, definimos:

x*: cantidad de kilómetros recorridos*

Luego ***expresar las cantidades desconocidas en términos de la incógnita***: convertimos toda la información dada en el problema al lenguaje algebraico

Lenguaje coloquial	***Lenguaje simbólico***
Costo del recorrido (a $350 por km)	$350.x$
Costo diario (a $18000 por día)	2.18000

Con esta información escribimos ***una ecuación que relacione los datos brindados por el problema con las expresiones del paso anterior.***

costo del recorrido + costo diario = costo total

$$350x + 2.18000 = 78000$$

Ahora estamos en condiciones de ***resolver la ecuación.***

$$350x + 36000 = 78000$$
$$350x = 78000 - 36000$$
$$350x = 42000$$
$$x = 42000 : 350$$
$$x = 120$$

Verificamos la solución:

$350.120 + 36000 = 78000$

y damos ***la respuesta al problema.***

Helena recorrió $120\ km$*.*

Este es un procedimiento que podemos sistematizar para abordar la resolución de situaciones que involucren el planteo y resolución de ecuaciones. Los pasos son:

1. Identificar la incógnita del problema. En general, se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada en el problema. Nombrarla con una letra.

2. Expresar todas las cantidades desconocidas que se mencionan en el problema en términos de la incógnita identificada en el Paso 1.

3. Escribir una ecuación que relacione los datos brindados por el problema con las expresiones del Paso 2.

4. Resolver la ecuación.

5. Verificar e interpretar el resultado obtenido en el Paso 4.

6. Escribir la respuesta a la pregunta planteada en el problema.

3.1. Práctica 2

1) Hallar un número natural sabiendo que la cuarta parte de su consecutivo es dos unidades menor que su tercera parte.

2) Juan gasta la sexta parte de su dinero; luego, las tres quintas partes de lo que le queda, y todavía, tiene $140. ¿Cuánto dinero tenía Juan?

3) María toma un taxi desde su casa hacia el aeropuerto. Sabe que la bajada de bandera cuesta $1200 y luego cada ficha de 100 metros cuesta $300. ¿Cuánto deberá pagar al taxista si la distancia entre el aeropuerto y su casa es de 5 kilómetros?

4) Hallar la medida de los lados de un rectángulo cuya base es el triple de su altura y el perímetro es 80.

5) Si Francisco se compra hoy un celular lo paga $\frac{8}{9}$ del precio de lista y puede hacerlo en 4 cuotas de $\$67500$. ¿Cuánto ahorra Francisco?

4. Ecuaciones cuadráticas

Diremos que una ecuación en una incógnita es ***cuadrática*** cuando se puede escribir de la forma:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{con} \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad a \neq 0$$

Los números a, b y c son los ***coeficientes*** y x la ***incógnita***.

Decimos que la ecuación cuadrática es ***completa*** cuando los coeficientes, b y c son distintos de cero, es decir, cuando se cumple que:

$$b \neq 0 \text{ y } c \neq 0$$

Y decimos que la ecuación cuadrática es ***incompleta*** cuando alguno de los coeficientes b o c son cero, es decir, cuando se cumple que:

$$b = 0 \text{ o } c = 0$$

4.1. Incompleta: b = 0

La ecuación cuadrática incompleta con $b = 0$ tiene la forma $ax^2 + c = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones aplicaremos la siguiente propiedad:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & si \qquad n\ es\ par \\ x & si \qquad n\ es\ impar \end{cases}$$

En particular, si $n = 2$ se tiene que: $\sqrt{x^2} = |x|$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - 4 = 0$ (Notar que: $a = 1$, $b = 0$ y $c = -4$)

$x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 4$
$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

como $\sqrt{p^2} = |p|$, esta ecuación es equivalente a:

$|x| = 2$ Por definición de valor absoluto, $x = \pm 2$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{2, -2\}$

4.2. Incompleta: c = 0

La ecuación cuadrática incompleta con $c = 0$ tiene la forma $ax^2 + bx = 0$

Ejemplo:

Resolver la ecuación $x^2 - 3x = 0$ (Notar que: $a = 1$, $b = -3$ y $c = 0$)

$x^2 - 3x = 0$ $\leftarrow$ extraer factor común x
$x \cdot (x - 3) = 0$ $\leftarrow$ aplicar la condición de anulación del producto: $p \cdot q = 0 \Leftrightarrow p = 0 \; o \; q = 0$
$x = 0$ o $x - 3 = 0$
$x = 0$ o $x = 3$

Por lo tanto el conjunto solución es $S = \{0, 3\}$

4.3. Completa

Cuando ningún coeficiente de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ es cero, podemos obtener sus soluciones usando la ***fórmula resolvente***:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Claramente, esta fórmula puede utilizarse para resolver ecuaciones cuadráticas incompletas pero resulta más sencillo utilizar los procedimientos descriptos en los capítulos anteriores.

Ejemplos:

1) Resolver la ecuación $x^2 - 9x + 8 = 0$
En esta ecuación tenemos que $a = 1$, $b = -9$ y $c = 8$. Al sustituir estos números en la fórmula resolvente y hacer los cálculos correspondientes, podemos obtener los valores de x:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} \\
&x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{2} \\
&x = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{2} \\
&x = \frac{9 \pm 7}{2} \\
&x_1 = \frac{9 + 7}{2} \text{ o } x_2 = \frac{9 - 7}{2} \\
&x_1 = 8 \text{ o } x_2 = 1
\end{aligned}$$

Verificamos que ambos valores satisfacen la ecuación:

$$\begin{aligned}
&8^2 - 9 \cdot 8 + 8 = 64 - 72 + 8 = 0 \\
&1^2 - 9 \cdot 1 + 8 = 1 - 9 + 8 = 0
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \{1, 8\}$

2) Resolver la ecuación $-5x^2 = \frac{1}{5} - 2x$
Lo primero que debemos hacer es reescribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, de este modo podremos reconocer los coeficientes Al hacerlo obtenemos $5x^2 - 2x + \frac{1}{5} = 0$, ahora sí es posible visualizar los coeficientes $a = 5$, $b = -2$ y $c = \frac{1}{5}$ que necesitamos reemplazar en la fórmula resolvente:

$$\begin{aligned}
&x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5}}}{2 \cdot 5} \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{10} \\
&x = \frac{2 \pm \sqrt{0}}{10} \\
&x = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

El conjunto solución es $S = \left\{ \frac{1}{5} \right\}$

Observación:

Antes de aplicar la resolvente a una ecuación de la forma $8x^2 - 32x + 32 = 0$, donde se observa un factor común (en este caso 8) primero extraé dicho factor común para que te quede una ecuación más sencilla pero equivalente (igual conjunto solución) a la original. En efecto, $8 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$.

4.4. El discriminante

En la fórmula resolvente $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, el número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y su signo determina la cantidad de soluciones reales de la ecuación cuadrática.

DISCRIMINANTE: $\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta > 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$ entonces la ecuación tiene dos soluciones reales e iguales. Se dice que la ecuación tiene una solución doble.
- Si $\Delta < 0$ entonces la ecuación no tiene solución real.

Ejemplo:

Analizar, sin resolver, si las siguientes ecuaciones cuadráticas poseen dos soluciones reales distintas, una sola doble o ninguna:

- $3x^2 + 2x - 6 = 0$, en esta ecuación:

  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-6) = 76 > 0$ entonces tiene dos soluciones reales y distintas.

- $x^2 + 2x + 1 = 0$, en esta ecuación:

  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ entonces tiene una solución real doble.

- $x^2 + 2x + 6 = 0$, en esta ecuación:

  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -20 < 0$ entonces no tiene solución real.

4.5. Práctica 3

1) Resolver, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones.

a) $3x^2 - 15 = 60$

b) $x^2 + 4 = 0$

c) $-5x^2 + 7x = 0$

d) $-x^2 + 3x - 2 = 0$

e) $x^2 - 2x + 2 = 0$

f) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$

g) $-3.(x+1)^2 + 12 = 7x + 9$

h) $2x.\,(x-1) - 3 = x - 3x - 2$

i) $(x+3).\,(6x-3) + 5.(9-7x) = 22$

j) $(x+2)^2 - 10 = 4x + 6$

k) $(3x-1)(x+4) = 2(3x-1)$

2) Encontrar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que $x = 2$ sea solución de la ecuación: $x^2 - 6kx + 8 + 2k = 0$.

3) Encontrar el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ para que la ecuación: $x^2 - 4kx + 9 = 0$ tenga única solución.

5. Las ecuaciones cuadráticas para representar situaciones concretas

Supongamos que queremos resolver el siguiente problema:

Un lote rectangular para construcción mide $8\ m$ más de largo que de ancho y tiene un área de $2900\ m^2$. Encontrar las dimensiones del lote.

Lo primero que tenemos que hacer es ***identificar la incógnita del problema.***
En este caso se pide determinar las dimensiones del lote, es decir, su ancho y su largo. Podemos definir:

x: ancho del lote

Luego necesitamos convertir la información del problema al lenguaje algebraico, y ***expresar las cantidades desconocidas en términos de la incógnita.***

Lenguaje coloquial	***Lenguaje simbólico***
Ancho del lote (en m)	x
Largo del lote (en m)	$x+8$

A continuación escribimos ***una ecuación que relacione los datos brindados por el problema con las expresiones del paso anterior.***

(ancho del lote) . (largo del lote) = área del lote

$$x.\,(x+8) = 2900$$

Ahora estamos en condiciones de ***resolver la ecuación****.*

$$x.\,(x+8) = 2900$$

$$x^2 + 8x = 2900$$

$$x^2 + 8x - 2900 = 0$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2900)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 11600}}{2}$$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{11664}}{2}$$
$$x = \frac{-8 \pm 108}{2}$$
$$x_1 = \frac{-8 + 108}{2} \text{ o } x_2 = \frac{-8 - 108}{2}$$
$$x_1 = 50 \text{ o } x_2 = -58$$

Como siempre***, verificamos las soluciones:***
$x_1 = 50$: $\quad 50.(50+8) = 50.\,58 = 2900$
$x_2 = -58$: $\quad -58.(-58+8) = -58.\,(-50) = 2900$

Pero, si bien ambas son soluciones de la ecuación ¿los dos valores pueden representar la solución de este problema?

Vemos que en el contexto del problema, como x representa el ancho del lote, debe ser un número positivo, por lo tanto $x_2 = -58$ no puede ser solución.

Concluimos entonces que $x = 50$ y ***damos la respuesta al problema:***

El lote tiene $50\ m$ de ancho por $58\ m$ de largo.

Resumiendo, los pasos para abordar la resolución de situaciones que involucren el planteo y resolución de ecuaciones cuadráticas son similares a los ya vistos para ecuaciones lineales:

1. Identificar la incógnita del problema. En general, se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada en el problema. Nombrarla con una letra.

2. Expresar todas las cantidades desconocidas que se mencionan en el problema en términos de la incógnita identificada en el Paso 1.

3. Escribir una ecuación que relacione los datos brindados por el problema con las expresiones del Paso 2.

4. Resolver la ecuación.

5. Verificar e interpretar el resultado obtenido en el Paso 4.

6. Escribir la respuesta a la pregunta planteada en el problema.

Ejemplo

Si se aumenta el lado de un cuadrado en 4 cm, su área aumenta a $81cm^2$ *. ¿Cuál es la medida del lado original?*

1. Identificamos la incógnita del problema: la incógnita es el lado del cuadrado original; la llamamos l

2. Expresamos las cantidades que se mencionan en el problema en términos de la incógnita:

Lenguaje coloquial	***Lenguaje simbólico***
lado del cuadrado aumentado (en cm)	$l+4$
área del cuadrado aumentado (en cm^2)	$(l+4)^2$

3. Escribimos una ecuación que relacione los datos brindados por el problema con las expresiones anteriores:

$$(l+4)^2=81$$

4. Resolvemos la ecuación:

$(l+4)^2=l^2+8l+16=81 \Leftrightarrow l^2+8l-65=0$

$\frac{-8\pm\sqrt{64-4\,(-65)}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{64+260}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{324}}{2}=\frac{-8\pm 18}{2}$

Las soluciones son $l_1=-13$ y $l_2=5$

5. Verificamos estos resultados:

$(-l3)^2+8.(-13)-65=169-104-65=0$

$5^2+8.5-65=25+40-65=0$

Pero en el contexto de este problema l representa una longitud, por lo que no puede ser negativa. La solución que se ajusta en este caso es $l=5$

6. Finalmente la respuesta a la pregunta planteada en el problema es: "*El lado del cuadrado original es 5 cm*"

5.1. Práctica 4

1) La diferencia entre un número y la mitad de su cuadrado es igual a 0. ¿De qué número se trata?

2) Si al multiplicar dos números pares consecutivos, se obtiene 1088, ¿qué números se multiplicaron?

3) Un pastizal mide el doble de largo que de ancho. Su área es de $115200m^2$. ¿Cuál es el ancho del pastizal?

4) Un fabricante de microprocesadores encuentra que la utilidad p (en dólares), generada por producir x microprocesadores por semana, está dada por la fórmula $p = \frac{1}{10}x.(300 - x)$ siempre que $0 < x < 200$. ¿Cuántos microprocesadores debe fabricar en una semana para generar una utilidad de $us\$1250$?

5) De un tablero de $1200cm^2$ se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con $5cm$ más de lado que la otra. Si las tiras de madera que sobran tienen un área de $83cm^2$, ¿cuánto miden los lados de las piezas cuadradas cortadas?

6. Ecuaciones con valor absoluto

Son ecuaciones donde la incógnita está entre barras de valor absoluto. Para resolverlas usaremos las propiedades de los números reales y la definición de valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a & si & a \geq 0 \\ -a & si & a < 0 \end{cases}$$ siendo a un número real

Ejemplos:

1) $|x| = \dfrac{1}{2}$

$|x| = \dfrac{1}{2}$ $\leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$x = \dfrac{1}{2}\ \ o\ \ x = -\dfrac{1}{2}$

El conjunto solución es $S = \left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\}$

2) $|x| + 5 = 7$

$|x| + 5 = 7$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| = 2$ $\leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$x = 2\ \ o\ \ x = -2$

El conjunto solución es $S = \{2, -2\}$

3) $-3|x| = -12$

$-3|x| = -12$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| = 4$ $\leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$x = 4\ \ o\ \ x = -4$

El conjunto solución es $S = \{4, -4\}$

4) $-3|x| + 5 = -4$

$-3|x| = -9$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| = 3$ $\leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$x = 3\ \ o\ \ x = -3$

El conjunto solución es $S = \{3, -3\}$

5) $-3|x| - 5 = 4$

$-3|x| = 9$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| = -3$ $\leftarrow$ no existe $x \in \mathbb{R}$ que verifique esta igualdad

El conjunto solución es $S = \{\}$

6) $|2x - 1| = 7$

$|2x - 1| = 7$ $\leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$2x - 1 = 7\ \ o\ \ 2x - 1 = -7$ $\leftarrow$ despejar el valor de la incógnita en cada ecuación

$2x = 8\ \ o\ \ 2x = -6$

$x = 4 \ \ o \ \ x = -3$

El conjunto solución es $S = \{4, -3\}$

7) $|2x - 1| + 1 = 8$

$|2x - 1| + 1 = 8 \ \ \leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|2x - 1| = 7 \ \ \leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$2x - 1 = 7 \ \ o \ \ 2x - 1 = -7 \ \ \leftarrow$ despejar el valor de la incógnita en cada ecuación

$2x = 8 \ \ o \ \ 2x = -6$

$x = 4 \ \ o \ \ x = -3$

El conjunto solución es $S = \{4, -3\}$

8) $3|2x - 1| = 24$

$3|2x - 1| = 24 \ \ \leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|2x - 1| = 8 \ \ \leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$2x - 1 = 8 \ \ o \ \ 2x - 1 = -8 \ \ \leftarrow$ despejar el valor de la incógnita en cada ecuación

$2x = 9 \ \ o \ \ 2x = -7$

$x = \frac{9}{2} \ \ o \ \ x = -\frac{7}{2}$

El conjunto solución es $S = \left\{\frac{9}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

9) $3|2x - 1| + 1 = 22$

$3|2x - 1| + 1 = 22 \ \ \leftarrow$ despejar el valor absoluto

$3|2x - 1| = 21$

$|2x - 1| = 7 \ \ \leftarrow$ aplicar definición de valor absoluto

$2x - 1 = 7 \ \ o \ \ 2x - 1 = -7 \ \ \leftarrow$ despejar el valor de la incógnita en cada ecuación

$2x = 8 \ \ o \ \ 2x = -6$

$x = 4 \ \ o \ \ x = -3$

El conjunto solución es $S = \{4, -3\}$

6.1. Práctica 5

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) Hallar la/las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $|3x+4|=13$

b) $3|x-1|+2=5$

c) $-2|-\frac{1}{2}x-4|=5$

d) $1=5|4-2x|-10$

e) $(x+2)^2=16$

2) La distancia entre un número y 40 es la quinta parte de 100. ¿De qué número se trata? ¿Hay un sólo número posible?

3) Expresar en lenguaje simbólico y resolver.

a) El quíntuplo del valor absoluto del siguiente del tercio de un número natural es igual a 15.

b) El valor absoluto de la diferencia entre un número y 5 es 7.

c) La tercera parte del valor absoluto de la suma entre un número y 1 es 1.

d) La suma entre 3 y el doble del valor absoluto de un número es 9.

7. Inecuaciones

Una ***inecuación en una incógnita*** es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas:

$$P(x) < Q(x) \quad \text{o} \quad P(x) \leq Q(x) \quad \text{o} \quad P(x) > Q(x) \quad \text{o} \quad P(x) \geq Q(x)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son expresiones algebraicas cuya variable es x, por lo que decimos que la inecuación tiene incógnita x.

Una ***solución*** de una inecuación es un valor de la incógnita que hace cierta la desigualdad.

El ***conjunto solución*** será aquel formado por todas las soluciones.

Resolver una inecuación en una incógnita es encontrar el o los valores numéricos de la incógnita que la verifican.

Propiedades

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$:

- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a.\,c < b.\,c$
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a.\,c > b.\,c$

7.1. Inecuaciones lineales

Diremos que una inecuación en una incógnita es ***lineal*** cuando se puede escribir de la forma:

$a \cdot x + b < 0$ o $a \cdot x + b \leq 0$ o $a \cdot x + b > 0$ o $a \cdot x + b \geq 0$ con $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Ejemplos:

1) $3x - 5 < 2$

$3x < 2 + 5 \leftarrow$ Sumamos 2 a ambos lados de la desigualdad

$3x < 7$

$x < 7.\dfrac{1}{3} \leftarrow$ Multiplicamos por $\dfrac{1}{3}$ a ambos lados de la desigualdad

$x < \dfrac{7}{3}$

El conjunto solución está formado por todos los números reales que verifican esto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}/x < \frac{7}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$$

2) $2x + 3 \geq 5.(x - 1)$

$2x + 3 \geq 5x - 5 \leftarrow$ Aplicamos propiedad distributiva

$2x \geq 5x - 5 - 3 \leftarrow$ Sumamos -3 a ambos lados de la desigualdad

$2x \geq 5x - 8$

$2x - 5x \geq -8 \leftarrow$ Sumamos $-5x$ a ambos lados de la desigualdad

$-3x \geq -8$

$x \leq -8.(-\dfrac{1}{3}) \leftarrow$ Multiplicamos por $-\dfrac{1}{3}$ a ambos lados de la desigualdad

$x \leq \dfrac{8}{3}$

El conjunto solución está formado por todos los números reales que verifican esto:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}/x \leq \frac{8}{3}\right\} = \left(-\infty, \frac{8}{3}\right]$$

7.2. Práctica 6

INECUACIONES LINEALES

1) Hallar los valores de x que verifican las siguientes condiciones:

a) $3x - 5 < x + 4$

b) $x - 3 > 2(x + 1) + 8$

c) $3x - 2 \geq 5(x - 1) - x + 2$

d) $2(x - 3) - (x + 1) < x + 4$

e) $\dfrac{x + 4}{2} \leq \dfrac{3x - 1}{4}$

2) Escribir en lenguaje simbólico y resolver.

a) El opuesto de la mitad de un número es mayor que la cuarta parte del mismo número disminuida en 2.

b) La mitad del opuesto de un número es mayor o igual que la tercera parte de la suma entre dicho número y 3.

c) La diferencia entre el triple de un número y $\dfrac{1}{2}$ es menor o igual que la suma entre la cuarta parte de ese número y el opuesto de -1.

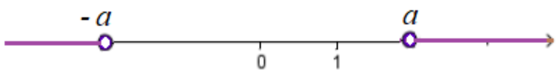
7.3. Inecuaciones con valor absoluto

Son inecuaciones donde la incógnita está entre barras de valor absoluto. Para resolverlas usaremos propiedades de los números reales y del valor absoluto.

Recordemos que si O es el origen de coordenadas, $|a|$ se puede interpretar como la distancia entre el punto A que representa a a y el origen: $d(A, O) = |a - 0| = |a|$

Con esto en mente, si $a > 0$ podemos interpretar al conjunto de los valores de x que verifican $|x| < a$ como el conjunto de puntos cuya distancia al O es menor que a:

De igual manera, el conjunto de los valores de x que verifican $|x| > a$ se puede interpretar como el conjunto de puntos cuya distancia al O es mayor que a:



Podemos decir genéricamente

1. $|x| < a \Leftrightarrow x > -a \ y \ x < a$ siendo a un número real positivo
2. $|x| \leq a \Leftrightarrow x \geq -a \ y \ x \leq a$ siendo a un número real positivo
3. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ o \ x > a$ siendo a un número real positivo
4. $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \ o \ x \geq a$ siendo a un número real positivo

Ejemplos:

1) $|x| < \frac{1}{2}$

$|x| < \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 1 de valor absoluto

$x > -\frac{1}{2} \ y \ x < \frac{1}{2}$, es decir: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

2) $|x| > \frac{1}{2}$

$|x| > \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 3 de valor absoluto

$x < -\frac{1}{2} \ o \ x > \frac{1}{2}$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

3) $|x| + 5 \leq 7$

$|x| + 5 \leq 7$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| \leq 2$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 1 de valor absoluto

$x \geq -2 \ y \ x \leq 2$, es decir: $-2 \leq x \leq 2$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S} = [-2, 2]$

4) $-3|x| \leq -12$

$-3|x| \leq -12$ $\leftarrow$ despejar el valor absoluto

$|x| \geq 4$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 4 de valor absoluto

$x \leq -4 \;\; o \;\; x \geq 4$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)}$

5) $|-3x + 5| < 4$

$|-3x + 5| < 4$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 1 de valor absoluto

$-3x + 5 > -4 \;\; y \;\; -3x + 5 < 4$ $\leftarrow$ resolver las inecuaciones resultantes

$-3x > -9 \;\; y \;\; -3x < -1$

$x < 3 \;\; y \;\; x > \frac{1}{3}$, es decir: $\frac{1}{3} < x < 3$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = \left(\frac{1}{3}, 3\right)}$

6) $|2x - 1| > 7$

$|2x - 1| > 7$ $\leftarrow$ aplicar propiedad 3 de valor absoluto

$2x - 1 < -7 \;\; o \;\; 2x - 1 > 7$ $\leftarrow$ despejar el valor de la incógnita en cada ecuación

$2x < -6 \;\; o \;\; 2x > 8$

$x < -3 \;\; o \;\; x > 4$

El conjunto solución es $\boldsymbol{S = (-\infty, -3) \cup (4, +\infty)}$

7.4. Práctica 7

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1) Resolver las siguientes inecuaciones y representar gráficamente la solución:

a) $|x-1|<2$

b) $2.|2x-1|-2 \geq 6$

c) $1-3.|x|>2$

d) $8-3.|2-x| \leq 5$

2) Escribir simbólicamente y hallar todos los números reales que cumplan con las condiciones dadas en cada caso.

a) El valor absoluto de un número es menor a tres

b) El valor absoluto de un número es mayor o igual que cinco

c) El valor absoluto de un número positivo es menor que cuatro

d) El valor absoluto de un número negativo es menor o igual que seis

e) El valor absoluto de un número es menor que siete y mayor que tres

f) El valor absoluto de la diferencia entre el triple de un número y 1 es menor que el valor absoluto de -5.

8. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

8.1. Práctica 1

1)

a) i) No **ii)** Sí

b) i) Sí **ii)** No

c) i) Sí **ii)** No

2)

a) 3

b) $-\dfrac{3}{4}$

c) No tiene solución

d) $\dfrac{21}{11}$

e) 30

f) $\dfrac{1}{17}$

g) $\dfrac{24}{11}$

h) 2

8.2. Práctica 2

1) 27

2) 420

3) 16200

4) Base 30 y altura 10

5) 33750

8.3. Práctica 3

1)

a) $-5;\ 5$

b) sin solución

c) $0;\ \frac{7}{5}$

d) $1;\ 2$

e) Sin solución en $\mathbb{R}$

f) -2

g) $-\frac{13}{3};0$

h) $-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}$

i) $1;\ \frac{7}{3}$

j) $-2\sqrt{3};2\sqrt{3}$

k) $-2;\ \frac{1}{3}$

2) $\frac{6}{5}$

3) $-\frac{3}{2};\ \frac{3}{2}$

8.4. Práctica 4

1) $0; \quad 2$

2) Los números que se multiplican son 32 y 34, o -34 y -32

3) El ancho es $240\ m$

4) 50 microprocesadores

5) $21\ cm$ y $26\ cm$

8.5. Práctica 5

1)

a) $-\frac{17}{3}$; 3

b) $0;\ 2$

c) No tiene solución

d) $\frac{9}{10}$; $\frac{31}{10}$

e) $-6;\ 2$

2) Hay 2 números posibles: 20 y 60.

3)

a) 6

b) $-2;\ 12$

c) $-4;\ 2$

d) $-3;\ \ 3$

8.6. Práctica 6

1)

a) $x < \frac{9}{2}$

b) $x < -13$

c) $x \leq 1$

d) Todos los números reales

e) $x \geq 9$

2)

a) $x < \frac{8}{3}$

b) $x \leq -\frac{6}{5}$

c) $x \leq \frac{6}{11}$

8.7. Práctica 7

1)

a) $x > -1$ y $x < 3$ o, lo que es lo mismo, $-1 < x < 3$ y por lo tanto el conjunto solución es $S = (-1, 3)$

b) $x \leq -\dfrac{3}{2}$ o $x \geq \dfrac{5}{2}$ y por lo tanto el conjunto solución es $S = \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$

c) No tiene solución

d) $x \leq 1$ o $x \geq 3$

2)

a) Escritura simbólica: $|x| < 3$. Respuesta: $x > -3$ y $x < 3$ o, lo que es lo mismo, $-3 < x < 3$; conjunto solución $S = (-3, 3)$

b) Escritura simbólica: $|x| \geq 5$. Respuesta: $x \leq -5$ o $x \geq 5$; conjunto solución $S = (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

c) Escritura simbólica: $x > 0$ y $|x| < 4$. Respuesta: $x > 0$ y $x < 4$ o, lo que es lo mismo, $0 < x < 4$; conjunto solución $S = (0, 4)$

d) Escritura simbólica: $x < 0$ y $|x| \leq 6$. Respuesta: $x < 0$ y $x \geq -6$ o, lo que es lo mismo, $-6 \leq x < 0$; conjunto solución $S = [-6, 0)$

e) Escritura simbólica: $3 < |x| < 7$. Respuesta: $-7 < x < -3$ o $3 < x < 7$; conjunto solución $S = (-7, -3) \cup (3, 7)$

f) Escritura simbólica: $|3x - 1| < |-5|$. Respuesta:$-\dfrac{4}{3} < x < 2$; conjunto solución $S = \left(-\dfrac{4}{3}, 2\right)$

Sistemas de ecuaciones lineales 2x2

Tabla de contenidos

1. Sistema de ecuaciones lineales

Un **sistema de ecuaciones** es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas.

Una **solución** de un sistema es una asignación de valores para las incógnitas que hace verdadera todas y cada una de las ecuaciones.

Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones del sistema.

Un **sistema de ecuaciones lineales** es un sistema de ecuaciones en el que cada ecuación es lineal.

Diremos que una ecuación es lineal en dos variables cuando se puede escribir de la forma:

$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$

Los números a, b y c son los coeficientes y x e y las incógnitas.

Trabajaremos con sistemas de ecuaciones lineales "2x2", esto es, que posean 2 ecuaciones con 2 incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \leftarrow \ Ecuación\ 1,\ Incógnitas:\ x,\ y \\ 2x - 5y = -1 \leftarrow \ Ecuación\ 2,\ Incógnitas:\ x,\ y \end{cases}$$

Ponemos el símbolo "{" para indicar que se deben satisfacer simultáneamente ambas ecuaciones.

Se puede comprobar que el par ordenado (dos números para los que interesa el orden) $(x, y) = (2, 1)$ es una solución del sistema reemplazando los valores de x e y en cada una de las dos ecuaciones:

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$x - y = 1$	$2x - 5y = -1$
$2 - 1 = 1$	$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$

En relación al conjunto solución, al resolver sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas podremos encontrarnos con uno de tres casos posibles:

- el conjunto solución tiene sólo un elemento (un par ordenado): es unitario.
- el conjunto solución tiene infinitos elementos (infinitos pares ordenados).
- el conjunto solución no tiene elementos, es vacío.

1.1. Métodos de resolución

Método de sustitución

Si queremos resolver el sistema planteado en el ejemplo de la sección anterior

$$\begin{cases} x - y = 1 \leftarrow \ Ecuación\ 1,\ Incógnitas:\ x,\ y \\ 2x - 5y = -1 \leftarrow \ Ecuación\ 2,\ Incógnitas:\ x,\ y \end{cases}$$

podemos proceder de la siguiente forma:

Como cada ecuación establece una relación entre ambas incógnitas, es posible escribir una de ellas en términos de la otra. Por ejemplo, de la ecuación 1 despejamos la incógnita x en términos de y:

$x = 1 + y$

Como estamos buscando pares (x, y) que satisfagan ambas ecuaciones simultáneamente, el mismo x será $1 + y$ en la ecuación 2. Por lo tanto sustituimos en $2x - 5y = -1$ la incógnita x por $1 + y$:

$2 \cdot (1 + y) - 5y = -1$

La ecuación resultante es una ecuación lineal en una incógnita, que podemos resolver como en el capítulo anterior:

$2 \cdot 1 + 2 \cdot y - 5y = -1$

$2 + 2y - 5y = -1$

$2 - 3y = -1$

$2 = -1 + 3y$

$2 + 1 = 3y$

$3 = 3y$

$\frac{1}{3} \cdot 3 = y$

$1 = y$

Obtuvimos así el segundo elemento del par $y = 1$. Pero como habíamos establecido una relación entre ambas incógnitas

$x = 1 + y$

podemos sustituir el valor de y hallado en esta expresión, y encontrar:

$x = 1 + 1$

$x = 2$

Finalmente, podemos verificar la solución obtenida:

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$x - y = 1$	$2x - 5y = -1$
$2 - 1 = 1$	$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$

y escribir el conjunto solución (en este caso un único par):

$S = \{(2, 1)\}$

El procedimiento que utilizamos recibe el nombre de ***método de sustitución*** y podemos describirlo como sigue:

1. Seleccionar una ecuación y despejar una incógnita en términos de la otra incógnita.
2. Sustituir la expresión hallada en el Paso 1 en la otra ecuación, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación resolver la ecuación resultante.
3. En la expresión hallada en el Paso 1, sustituir el valor hallado en el Paso 2 para despejar la incógnita restante.
4. Verificamos, si es posible, todas las soluciones obtenidas.
5. Escribir, si es posible, todas las soluciones del sistema.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de sustitución:

$$\begin{cases} x+y=10 \leftarrow \ Ecuación\ 1,\ Incógnitas:\ x,\ y \\ x+y=5 \leftarrow \ Ecuación\ 2,\ Incógnitas:\ x,\ y \end{cases}$$

1. De la ecuación 1 despejamos la incógnita x:

$$x = 10 - y$$

2. En la ecuación 2 sustituimos la incógnita x por la expresión $x = 10 - y$:

$$10 - y + y = 5$$

Resolvemos la ecuación resultante:

$$10 - y + y = 5$$

$$10 = 5$$

Esto es absurdo puesto que 10 no es igual a 5. Esto indica que la ecuación, y por lo tanto el sistema, no tiene solución. (Deben omitirse los pasos 3 y 4)

5. Escribimos, si es posible, todas las soluciones del sistema:
El sistema no tiene solución, de modo que $S = \emptyset$

Método de igualación

Veamos otro posible método para resolver un sistema. Consideremos nuevamente el ejemplo de la sección anterior:

$$\begin{cases} x-y=1 \leftarrow \ Ecuación\ 1,\ Incógnitas:\ x,\ y \\ 2x-5y=-1 \leftarrow \ Ecuación\ 2,\ Incógnitas:\ x,\ y \end{cases}$$

Teniendo en cuenta nuevamente que cada uno de los elementos del par (o los pares) (x, y) que buscamos debe verificar simultáneamente ambas ecuaciones, podemos escribir x en términos de y en las dos, e igualar (también valdría escribir y en términos de x en ambas).

De la ecuación 1: $x = 1 + y$

De la ecuación 2: $x = \dfrac{-1+5y}{2}$

Luego:

$$1 + y = \frac{-1+5y}{2}$$

Como en el método anterior, la ecuación resultante es una ecuación lineal en una incógnita, que podemos resolver:

$$2 \cdot (1+y) = -1 + 5y$$

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot y = -1 + 5y$$

$$2 + 2y - 5y = -1$$

$$2 - 3y = -1$$

$$2 = -1 + 3y$$

$$2 + 1 = 3y$$

$$3 = 3y$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = y$$

$1 = y$

Finalmente calculamos x sustituyendo el valor de y encontrado en cualquiera de las expresiones halladas**:**

$x = 1 + 1$

$x = 2$

ó

$x = \frac{-1 + 5 \cdot 1}{2}$

$x = 2$

Finalmente verificamos la solución obtenida:

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$x - y = 1$	$2x - 5y = -1$
$2 - 1 = 1$	$2 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = -1$

y escribimos el conjunto solución $S = \{(2, 1)\}$

El procedimiento que utilizamos recibe el nombre de ***método de igualación*** y podemos describirlo como sigue:

1.Despejar, en ambas ecuaciones, una incógnita en términos de la otra incógnita.
2.Igualar las expresiones halladas en el Paso 1, para obtener una ecuación con una incógnita y, a continuación despejar esa incógnita.
3. En cualquiera de las expresiones halladas en el Paso 1, sustituir el valor hallado en el Paso 2 para calcular el valor de la incógnita restante.
4. Verificamos, si es posible, todas las soluciones obtenidas.
5. Escribir, si es posible, todas las soluciones del sistema.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de igualación:

$$\begin{cases} x + y = 3 \leftarrow \ Ecuación\ 1,\ Incógnitas:\ x,\ y \\ 2x + 2y = 6 \leftarrow \ Ecuación\ 2,\ Incógnitas:\ x,\ y \end{cases}$$

1. De ambas ecuaciones despejamos la incógnita y:

   De la ecuación 1: $y = 3 - x$

   De la ecuación 2: $y = 3 - x$

2. Igualamos las expresiones halladas en el paso 1:

   $3 - x = 3 - x$

Resolvemos la ecuación resultante:

$3 - x = 3 - x$

$0 = 0x$

Esto es válido para todo número real x. Esto indica que la ecuación, y por lo tanto el sistema, tiene infinitas soluciones. (Deben omitirse los pasos **3** y **4**)

5. Escribimos, si es posible, el conjunto de todas las soluciones del sistema:
$S = \{(x, y) / y = 3 - x,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$

Método de reducción

Otro posible método de resolución consiste en utilizar las propiedades vistas para las operaciones entre números, para combinar las ecuaciones del sistema.

Para el mismo sistema del ejemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$$

Se puede pensar que la ecuación $x - y = 1$ es equivalente a $2x - 2y = 2$, y por lo tanto el sistema puede reescribirse como:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ 2x - 5y = -1 \end{cases}$$

que tendrá el mismo conjunto solución que el anterior.

Como $2x - 5y = -1$, restar $2x - 5y$ a ambos miembros de $2x - 2y = 2$, es lo mismo que restar $2x - 5y$ a la izquierda del signo "**=**" y restar -1 a la derecha del mismo. Podemos decir informalmente que "restamos ambas ecuaciones"

$$\begin{array}{rrcr} & 2x - 2y & = & 2 \\ - & & & \\ & 2x - 5y & = & -1 \\ \hline & 3y & = & 3 \end{array}$$

Nuevamente obtenemos una ecuación lineal en una variable, que sabemos resolver:

$3y = 3$

$y = 1$

y sustituyendo este valor en cualquiera de las ecuaciones originales obtenemos $x = 2$

Verificamos la solución (ya lo hemos hecho) y finalmente escribimos el conjunto solución del sistema $S = \{(2, 1)\}$

Este procedimiento se conoce como ***método de reducción*** y se puede describir de esta forma:

1. En caso de ser necesario multiplicar por algún número ambos miembros de alguna de las ecuaciones (o las dos) para que coincidan los coeficientes de alguna de las incógnitas.
2. Sumar (o restar) las ecuaciones entre sí para eliminar una de las incógnitas.
3. Resolver la ecuación resultante.
4. Sustituir el valor hallado en el Paso 3 en cualquiera de las ecuaciones para despejar la incógnita restante.
5. Verificar, si es posible, todas las soluciones obtenidas.
6. Escribir, si es posible, el conjunto solución del sistema.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 5x + 2y = -15 \\ x + 2y = 9 \end{cases}$$

1. Como el coeficiente que acompaña a la y en ambas ecuaciones es el mismo, no es necesario multiplicar ambos miembros de ninguna de las ecuaciones por un número.

2. Restamos las ecuaciones:

$$\begin{array}{rcr} 5x+2y & = & -15 \\ - \\ x+2y & = & 9 \\ \hline \\ 4x & = & -24 \end{array}$$

3. Resolvemos la ecuación

$4x = -24$

$x = -\frac{24}{4} = -6$

4. Sustituimos en la segunda ecuación:

$-6 + 2y = 9$

y resolvemos:

$2y = 9 + 6$

$y = \frac{15}{2}$

5. Verificamos:

Ecuación 1	**Ecuación 2**
$5x + 2y = -15$	$x + 2y = 9$
$5(-6) + 2\frac{15}{2} = -15$	$-6 + 2\frac{15}{2} = 9$

6. Escribimos el conjunto solución del sistema: $S = \left\{(-6, \frac{15}{2})\right\}$

1.2. Los sistemas de ecuaciones para representar situaciones concretas

Con la misma idea con la que planteamos los problemas que pueden resolverse con una ecuación lineal, los sistemas surgen cuando hay dos incógnitas que están interrelacionadas.

Por ejemplo, si tenemos que resolver el siguiente problema:

Una fábrica hace bicicletas del modelo A, que llevan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y otras del modelo B, que llevan 2 kg de acero y 2 kg de aluminio. La empresa tiene 240 kg de acero y 360 kg de aluminio, que se quieren usar sin que sobre nada para construir ambos modelos de bicicletas. ¿Cuántas bicicletas puede construir de cada modelo?

Primero **identificamos las incógnitas del problema.** Se pide determinar la cantidad de bicicletas que pueden construirse de cada uno de los dos modelos, entonces llamamos:
a: cantidad de bicicletas del modelo A que pueden construirse
b: cantidad de bicicletas del modelo B que pueden construirse

A continuación **expresamos las cantidades desconocidas en términos de las incógnitas.** Cada bicicleta del modelo A lleva 1 kg de acero y cada bicicleta del modelo B, 2 kg de acero, por lo que la cantidad total de acero es la suma de los productos entre la cantidad de acero usado para cada modelo y la cantidad de unidades producidas de ese modelo. Además, cada bicicleta del modelo A lleva 3 kg de aluminio y cada bicicleta del modelo B, 2 kg de aluminio, por lo que la cantidad total de aluminio es la suma de los productos entre la cantidad de aluminio usado para cada modelo y la cantidad de unidades producidas de ese modelo. Traducimos estas oraciones al lenguaje simbólico:

Lenguaje coloquial	**Lenguaje simbólico**
Cantidad de total de acero a utilizar	$1 \cdot a + 2 \cdot b$
Cantidad de total de alumnio a utilizar	$3 \cdot a + 2 \cdot b$

Seguidamente **escribimos ecuaciones relacionando los datos brindados por el problema con las expresiones del paso anterior y planteamos un sistema de ecuaciones.** Como la empresa dispone de un total de 240 kg de acero y de 360 kg de aluminio:

$$\begin{cases} 1 \cdot a + 2 \cdot b = 240 \leftarrow \ Ecuación\ 1 \\ 3 \cdot a + 2 \cdot b = 360 \leftarrow \ Ecuación\ 2 \end{cases}$$

Luego **resolvemos el sistema** con cualquiera de los métodos vistos:

$a = 240 - 2 \cdot b$ $\leftarrow$ de la ecuación 1 despejamos la incógnita a

$3 \cdot (240 - 2 \cdot b) + 2 \cdot b = 360$ $\leftarrow$ en la ecuación 2 sustituimos la incógnita a

$3 \cdot 240 - 3 \cdot 2 \cdot b + 2 \cdot b = 360$ $\leftarrow$ resolvemos la ecuación resultante

$720 - 6 \cdot b + 2 \cdot b = 360$

$720 - 4 \cdot b = 360$

$720 = 360 + 4 \cdot b$

$720 - 360 = 4 \cdot b$

$360 = 4 \cdot b$

$360/4 = b$

$90 = b$

Como $a = 240 - 2 \cdot 90 \leftarrow$, con el valor de b calculamos el de a

$a = 60$

Verificamos e interpretamos los resultados obtenidos:

Ecuación 1	Ecuación 2
$a + 2 \cdot b = 240$	$3 \cdot a + 2 \cdot b = 360$
$60 + 2 \cdot 90 = 240$	$3 \cdot 60 + 2 \cdot 90 = 360$

Los valores verifican el sistema planteado. Podemos decir que:
con esas cantidades de acero y de aluminio pueden fabricarse 60 bicicletas del modelo A y 90 bicicletas del modelo B.

Generalizando, los pasos para abordar la resolución de situaciones que involucren el planteo y resolución de sistemas de ecuaciones son:

1. Identificar las incógnitas del problema. En general, se determinan mediante cuidadosa lectura de la pregunta planteada en el problema. Nombrar cada incógnita con una letra.

2. Expresar todas las cantidades desconocidas que se mencionan en el problema en términos de las incógnitas identificadas en el Paso 1.

3. Escribir ecuaciones relacionando los datos brindados por el problema con las expresiones del Paso 2.

4. Plantear un sistema de ecuaciones utilizando las ecuaciones del Paso 3.

5. Resolver el sistema del Paso 4 usando alguno de los métodos vistos anteriormente.

6. Verificar e interpretar los resultados obtenidos en el Paso 5.

7. Escribir la respuesta a la pregunta planteada en el problema.

2. Práctica

SISTEMAS DE ECUACIONES

1) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales.

a) $\begin{cases} 2x - 3y = -9 \\ y + x = -2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ y - 1 = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y - \dfrac{2}{5}x = 1 \\ 2x - 5y = 10 \end{cases}$

d) $\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x + y = 1 \\ x + 2 = 2y \end{cases}$

e) $\begin{cases} 6y + 1 = 9x \\ 3x - \dfrac{1}{3} = 2y \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3.(3x - 1) = -2y \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

2) En cada caso plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo:

a) Dos números suman 45 y el triple de uno de ellos es 21. ¿Cuáles son los números?

b) El doble de la suma de dos números es 32 y su diferencia es 0. ¿Cuáles son los números?

c) La suma de dos números es 2 y la suma entre el doble de uno de ellos y el otro es 5. ¿Cuáles son los números?

d) La cimentación de una construcción es el conjunto de elementos estructurales cuya misión es transmitir las cargas de la edificación al suelo. Cierta edificación se cimentará usando pilares que se apoyarán en las capas profundas del suelo. A partir de un estudio, se determinó que la profundidad a alcanzar es de a lo sumo 24 metros. Se decidió diseñar dos tipos de pilares uno con longitud A y otro con longitud B, de modo que la suma de ambas longitudes permita alcanzar la máxima profundidad requerida y que la longitud A sea la mitad de la longitud B. ¿qué longitud tiene cada tipo de pilar?

e) La semana pasada, una empresa metalúrgica compró a su proveedor 48 chapas galvanizadas, de tipo lisas y de tipo acanaladas, abonando un total de 913 miles de pesos. Si se sabe que las chapas lisas cuestan el doble que las acanaladas, y que estas últimas cuestan 11 mil pesos ¿cuántas chapas de cada tipo se compraron?

f) Una investigadora realiza un experimento para probar una hipótesis donde intervienen los nutrientes niacina y retinol. Ella alimenta a un grupo de ratas de laboratorio con una dieta diaria de precisamente 32 unidades de niacina y 22000 unidades de retinol. Para ello usa dos tipos de alimentos comerciales, A y B, en forma de pastillas. El alimento A contiene $0,12$ unidades de niacina y 100 unidades de retinol por gramo; el alimento B contiene $0,20$ unidades de niacina y 50 unidades de retinol por gramo. ¿Cuántos gramos de cada alimento les da ella al grupo de ratas diariamente?

g) Una bióloga tiene dos soluciones de salmuera, una contiene 5% de sal y otra contiene 20% de sal. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe ella mezclar para obtener 1 litro de una solución que contenga 14% de sal?

h) Un avión pequeño realizó un vuelo entre dos ciudades separadas por una distancia de 180 kilómetros. En el vuelo ida, con viento de frente, duró 2 horas. En el viaje de regreso, el viento todavía estaba soplando con la misma velocidad, de modo que el viaje duró 1 hora y 12 minutos. Sabiendo que la magnitud de la velocidad del avión fue constante, ¿cuál fue la magnitud de la velocidad del avión?¿y la del viento?

3. Respuestas

1)

a) $x = -3,\ y = 1$

b) $x = -2,\ y = 0$

c) No tiene solución

d) $y = \frac{1}{2}x + 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

e) $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{6},\ \forall x \in \mathbb{R}$

f) $x = -\frac{1}{3},\ y = 3$

2)

a) Los números son 7 y 38.

b) Ambos números son 8.

c) Los números son 3 y -1.

d) Las longitudes son: $A = 8$ metros, $B = 16$ metros.

e) Compraron 35 lisas y 13 acanaladas.

f) Les da 200 gramos del alimento A y 40 gramos del alimento B**.**

g) Debe mezclar 400 mililitros de la salmuera al 5% de sal y 600 mililitros de la salmuera al 20% de sal **.**

h) La magnitud de la velocidad del avión fue de $120km/h$ y la del viento $30km/h$.

Polinomios

Tabla de contenidos

1. Definiciones

Un polinomio es una expresión algebraica para la cual los exponentes de sus variables son números enteros no negativos.

Ejemplos:

a) $8x^2 - 3\ x^{-4}$ no es un polinomio puesto que uno de los exponentes de la variable es negativo.

b) $x^3 + 5^{-1}$ es un polinomio de una variable, x.

c) $\dfrac{3x+6}{x^2} = (3x+6) \cdot x^{-2}$ no es un polinomio puesto que uno de los exponentes es negativo.

d) $3x + 5x^2$ es un polinomio de una variable, x.

e) $2xy - 1$ es un polinomio de dos variables, x e y.

f) $\sqrt{5}x^4 + 3x - 1$ es un polinomio de una variable, x.

g) $\sqrt{2x} + x^3 - x = (2x)^{\frac{1}{2}} + x^3 - x = 2^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{2}} + x^3 - x$ no es un polinomio puesto que uno de los exponentes de la variable es un racional.

f) $8^x - x^3 + 2x^2$ no es polinomio puesto que la variable no puede estar en el exponente.

Es usual nombrar a los polinomios usando una letra y escribiendo a continuación y entre paréntesis el nombre de la o las variables: $p\,(x)$, $q\,(x,y)$, $r\,(a)$... En este capítulo trabajaremos con polinomios de una variable.

Al coeficiente del término cuya variable tiene el mayor exponente se lo llama **coeficiente principal** y al coeficiente del término en el cual no aparece la variable se lo llama **término independiente**.

El **grado** de un polinomio es el mayor exponente de la variable, de los términos con coeficientes distintos de cero. Si todos los coeficientes del polinomio son cero, el polinomio **carece de grado** y lo conocemos como **polinomio nulo**.

Ejemplos:

a) $p(x) = x^3 + 5^{-1}$**:** el polinomio p tiene grado 3, coeficiente principal 1 y término independiente 5^{-1}.

b) $q(x) = 3x + 5x^2$: el polinomio q tiene grado 2, coeficiente principal 5 y término independiente 0.

c) $r(x) = \sqrt{5}x^4 + 3x - 1$: el polinomio r tiene grado 4, coeficiente principal $\sqrt{5}$ y término independiente -1.

d) $t(x) = 8 - x$**:** el polinomio t tiene grado 1, coeficiente principal -1 y término independiente 8.

e) $c(x) = 9$: el polinomio c tiene grado 0, coeficiente principal 9 y término independiente 9.

f) $n(x) = 0$: el polinomio n carece de grado y de coeficiente principal, su término independiente es 0.

Clasificación de polinomios

Según la cantidad de términos, un polinomio de una variable se denomina:

- **monomio**, si tiene un solo término
- **binomio**, si tiene dos términos, es decir, si es suma de dos monomios no nulos de distinto grado.
- **trinomio**, si tiene tres términos, es decir, si es suma de tres monomios no nulos de distinto grado.
- **cuatrinomio**, si tiene cuatro términos, es decir, si es suma de cuatro monomios no nulos de distinto grado.

Según el grado, un polinomio se denomina:

- **nulo**, si carece de grado, es decir, si todos sus coeficientes son cero.
- **constante**, si es de grado cero, es decir, si es un número distinto de cero.
- **lineal**, si es de grado uno.
- **cuadrático**, si es de grado dos.
- **cúbico**, si es de grado tres.
- **de grado** n, si es de grado $n \geq 4$.

Ejemplos:

a) $n(x) = 0$ es un polinomio nulo, carece de grado.

b) $c(x) = 8$ es un monomio constante.

c) $a(x) = \frac{1}{2}x$ es un monomio lineal.

d) $m(x) = 2x^3 + 8 - 5 - 3 = 2x^3$ es un monomio cúbico.

e) $n(x) = -3x^2 + 2x^2 + 8x = -x^2 + 8x$ es un binomio cuadrático.

f) $q(x) = -x^5 + 6x^2 - 7x$ es un trinomio de grado 5.

g) $r(x) = x^2 + 2x - 6$ es un trinomio cuadrático.

h) $p(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$ es un cuatrinomio de grado 4.

1.1. Polinomios completos y ordenados

Decimos que un polinomio es:

- **completo** si tiene todos los términos correspondientes a las distintas potencias de la variable, desde cero hasta el grado del polinomio.
- **ordenado** si sus términos están ordenados en forma creciente o decreciente respecto de los exponentes de la variable.

Ejemplos:

a) $p(x) = x^4 - 3x^2 + x - 2x^3 + 1$ es un polinomio completo, pero no ordenado

b) $q(x) = 5x^3 - 2x + 1$ es un polinomio incompleto y ordenado

c) $r(x) = 1 + 4x - 8x^2$ es un polinomio completo y ordenado

d) $s(x) = 2x - 5$ es un polinomio completo y ordenado

e) $s(x) = x + 3 - 4x^4$ es un polinomio incompleto y no ordenado

Para completar un polinomio, se agregan los términos que faltan con coeficiente cero. Para ordenarlo, se deben reacomodar los términos en forma creciente o decreciente según los exponentes de la variable. En este curso ordenaremos los polinomios en forma decreciente, salvo que se indique lo contrario.

Veamos cómo ordenar y completar los ejemplos anteriores:

a) $p(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + x + 1$ está completo y ordenado

b) $q(x) = 5x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ está completo y ordenado

c) $r(x) = -8x^2 + 4x + 1$ está completo y ordenado (ahora en forma decreciente)

d) $s(x) = 2x - 5$ está completo y ordenado

e) $s(x) = -4x^4 + 0x^3 + 0x^2 + x + 3$ está completo y ordenado

1.2. Igualdad de polinomios

Dos polinomios son iguales si tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos homólogos son iguales, es decir, los coeficientes de los respectivos términos de igual exponente de cada polinomio son iguales.

Ejemplo:

Hallar los valores de a, b, c y d para que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ sean iguales.

$p(x) = 5x^2 + 4x + 6$

$q(x) = ax^3 + (a+b)x^2 - cx + (c-d)$

Igualamos coeficiente a coeficiente, según los términos de igual exponente:

$p(x) = 0\ x^3 + 5\ x^2 + 4\ x + 6$

$q(x) = a\ x^3 + (a+b)\ x^2 - c\ x + (c-d)$

(1) $0 = a \leftarrow$ Igualamos los coeficientes de x^3 de cada polinomio

(2) $5 = a + b \leftarrow$ Igualamos los coeficientes de x^2 de cada polinomio

(3) $4 = -c \leftarrow$ Igualamos los coeficientes de x de cada polinomio

(4) $6 = c - d \leftarrow$ Igualamos los términos independientes de cada polinomio

Luego, de *(1)* resulta que $a = 0$. Reemplazando este valor en la ecuación *(2)*, se tiene que $b = 5$.

De *(3)* resulta $c = -4$, y reemplazando en *(4)*, se tiene que $d = -10$.

1.3. Raíces de un polinomio

Un número real α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$.

Para hallar las raíces de un polinomio $p(x)$ se debe resolver la ecuación $p(x) = 0$.

Ejemplos:

1) 3 es raíz del polinomio $p(x) = x - 3$ porque $p(3) = 3 - 3 = 0$.

2) 1 es raíz del polinomio $q(x) = x^2 - 2x + 1$ porque $q(1) = 1^2 - 2.1 + 1 = 0$.

3) Para hallar las raíces del polinomio $r(x) = 3x - 2$ debemos resolver la ecuación $r(x) = 0$.

$$r(x) = 0$$

$$3x - 2 = 0$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Luego, $\frac{2}{3}$ es raíz de $r(x)$.

4) Sea el polinomio $t(x) = x^2 - x - 6$. Para hallar las raíces de $t(x)$ debemos resolver la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$. Como es una ecuación cuadrática, podemos usar la fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = \frac{1+5}{2} \text{ o } x_2 = \frac{1-5}{2}$$

$$x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -2$$

Luego, las raíces de $t(x)$ son 3 y -2.

5) Sea el polinomio $u(x) = x^3 - x$. Para hallar las raíces de $u(x)$ debemos resolver la ecuación $x^3 - x = 0$.

$$x^3 - x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 1) = 0 \leftarrow \text{ sacamos factor común } x$$

Por regla de anulación del producto, $x \cdot (x^2 - 1) = 0$ si $x = 0$ o $x^2 - 1 = 0$, es decir, si $x = 0$ o $x = 1$ o $x = -1$.

Resultan entonces 0, 1, y -1 raíces de $u(x)$.

1.4. Práctica 1

1) Identificar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios. En caso que lo sean, clasificarlos según la cantidad de términos:

a) $18x + x^{-1}$

b) $\sqrt{3}x^3 - 5$

c) $\frac{2}{3}x^2 + 6x - 2$

d) $\sqrt[5]{x^3} - 9$

e) $x^{10} - \frac{x}{5}$

f) $\left(x^2 - 1\right)^2$

2) Completar y ordenar los siguientes polinomios e indicar grado, coeficiente principal y término independiente:

a) $-3x + 7x^2 - 3 + x^3$

b) $4x^2 - 3x^5 + 7 + 8x^3$

c) $x + 7x^2 - 3x - 5x$

d) $4x^4 - x^2 - 3x^4 + 6 + 3x^2$

e) $-5x - x^5 - x^3 - 4 - 2x^5 + 3x^5$

3) Hallar los valores de a, b y c, de modo que los polinomios resulten iguales:

a) $p(x) = (a-3) - 6x + (2b+12)x^2 \quad q(x) = (b+15)x^2 + (a+b)x + 6 + 2a$

b) $p(x) = ax^3 + 4x^2 - c + 1 \quad q(x) = (-b-2)x^2 - 9$

4) Indicar en cada caso si α es raíz del polinomio:

a) $p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x + 1, \quad \alpha = 1$

b) $q(x) = x^2 + 3x - 10, \quad \alpha = -2$

c) $r(x) = x^2 + 3x - 10, \quad \alpha = -5$

5) Hallar las raíces de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = -6x + 5$

b) $q(x) = x^2 - 5x + 6$

c) $r(x) = 3x^4 - 6x^3 + 3x^2$

d) $s(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

e) $t(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

2. Operaciones con polinomios

Por tratarse de expresiones algebraicas, la suma, resta y multiplicación de polinomios son las vistas en el capítulo 3. A continuación veremos la división entre polinomios.

2.1. División

<u>División de monomios</u>

Para dividir dos monomios, el grado del monomio **dividendo** tiene que ser mayor o igual que el grado del monomio **divisor**. En tal caso, se deben dividir los coeficientes y restar las potencias de la variable entre sí, aplicando la propiedad de la división de potencias de igual base $x^n : x^m = x^{n-m}$.

Ejemplos:

1) $(10x^3) : (5x) = (10 : 5).(x^3 : x) = 2x^2$

Puede ser útil expresar $(10x^3) : (5x) = \frac{10x^3}{5x}$ para obtener el resultado $\frac{10}{5}\frac{x^3}{x} = 2x^2$

2) $(-7x^8) : (3x^5) = (-7 : 3).(x^8 : x^5) = -\frac{7}{3}x^3$

De la misma forma $(-7x^8) : (3x^5) = \frac{-7x^8}{3x^5} = \frac{-7}{3}\frac{x^8}{x^5} = -\frac{7}{3}x^3$

<u>División de un polinomio por un monomio</u>

Si el grado del monomio divisor es menor o igual que el exponente de la variable en cada uno de los términos del polinomio dividendo, se puede aplicar propiedad distributiva.

Ejemplos:

1) $(12x^6 + 36x^4 - 6x^3 + 42x) : (-6x) =$

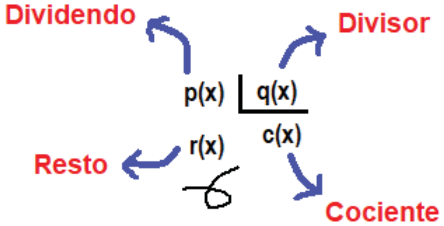
$= (12x^6) : (-6x) + (36x^4) : (-6x) + (-6x^3) : (-6x) + (42x) : (-6x) = -2x^5 - 9x^3 + x^2 - 7$

2) $(-9x^7 + 4x^5) : (2x^3) = (-9x^7) : (2x^3) + (4x^5) : (2x^3) = -\frac{9}{2}x^4 + 2x^2$

Si el grado del monomio divisor es mayor que el exponente de la variable en uno o más de los términos del polinomio dividendo, se debe proceder como veremos a continuación, para el caso general de división de polinomios.

<u>División de polinomios</u>

En general, dos polinomios se podrán dividir siempre que el grado del polinomio **dividendo** sea mayor o igual que el grado del polinomio **divisor**, en tal caso obtendremos un polinomio **cociente** y un polinomio **resto.**



Se cumple que:

$$p(x) = c(x).q(x) + r(x)$$

y además, el grado del resto será menor que el del divisor, o el resto será el polinomio nulo.

Cuando el resto sea el polinomio nulo, diremos que $p(x)$ es **divisible** por $q(x)$, o que $q(x)$ es **divisor** de $p(x)$.

¿Cómo obtenemos los polinomios cociente y resto?

Para realizar lo que denominamos división clásica, primero debemos:

- completar y ordenar en forma decreciente el polinomio dividendo,
- ordenar en forma decreciente el polinomio divisor.

Una vez hecho esto, se dividirá el primer término del dividendo por el primer término del divisor, y se procederá como veremos en el siguiente ejemplo:

Dados los polinomios:

$$p(x) = -10x^2 - 5 + 4x^4$$

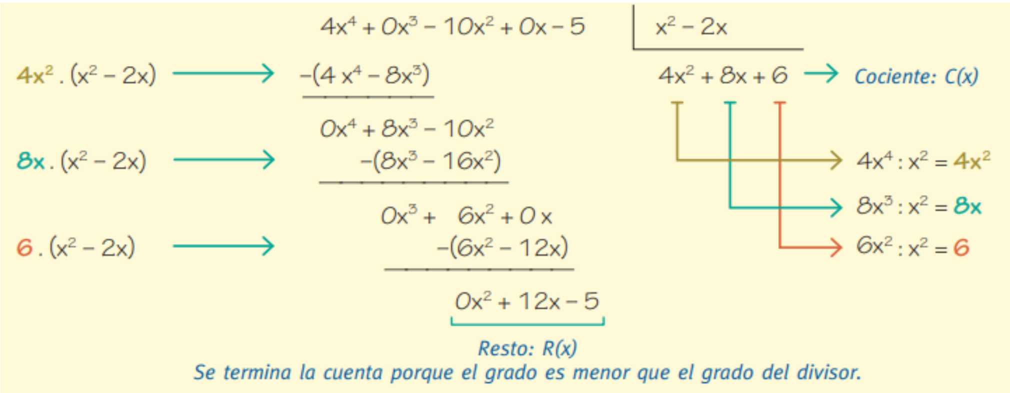
$$q(x) = -2x + x^2$$

hallar $p(x) : q(x)$.

Primero completamos y ordenamos al dividendo y ordenamos al divisor:

$p(x) = 4x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 0x - 5 \quad \longleftarrow$ ordenado y completo

$q(x) = x^2 - 2x \quad \longleftarrow$ ordenado



2.2. Regla de Ruffini y Teorema del resto

Regla de Ruffini

Cuando en una división de polinomios, el divisor es de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, existe otro procedimiento para obtener el cociente y el resto, denominado **regla de Ruffini**.

Veamos con un ejemplo cómo se utiliza esta regla.

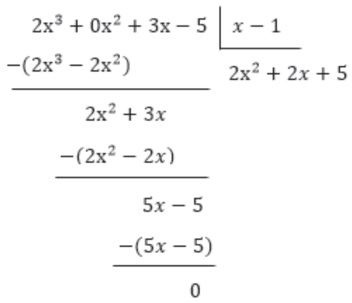
Dados los polinomios

$$p(x) = 3x + 2x^3 - 5$$

$$q(x) = x - 1$$

hallar $p(x) : q(x)$.

Realicemos primero la división como vimos en el apartado anterior. Recordemos que para empezar, debemos ordenar y completar a $p(x)$ y ordenar a $q(x)$.



Obtenemos así que el cociente es $c(x) = 2x^2 + 2x + 5$ y que el resto es $r(x) = 0$.

Ahora, resolveremos esta misma división usando la **regla de Ruffini**.

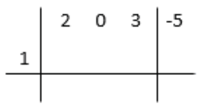
1°) Al igual que para la división tradicional, el dividendo debe estar completo y ordenado en forma decreciente.

$$p(x) = 2x^3 + 0x^2 + 3x - 5$$

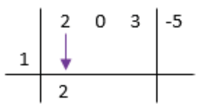
El divisor, en los casos en que se puede usar la regla de Ruffini es siempre un binomio de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. En este caso, es $q(x) = x - 1$. es decir $\alpha = 1$.

2°) Luego, listamos todos los coeficientes de cada término del dividendo, ubicándolos en una tabla y colocamos α a la izquierda de los coeficientes y una fila más abajo, como se muestra a continuación:

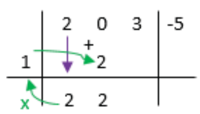
En este caso los coeficientes son $2, 0, 3$ y -5, y $\alpha = 1$.



3°) En la tercera fila, debajo de la horizontal trazada copiamos el primer coeficiente.



4°) A continuación, multiplicamos este número por α, colocamos el resultado debajo del segundo coeficiente y los sumamos al mismo.



5°) Repetimos este proceso hasta el último coeficiente inclusive, es decir, hasta el término independiente.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 2 & 0 & 3 & -5 \\ 1 & \downarrow & 2 & 2 & 5 \\ \hline & 2 & 2 & 5 & 0 \end{array}$$

Observemos que los tres primeros coeficientes que se obtuvieron en la última fila, corresponden a los coeficientes del cociente $c(x) = 2x^2 + 2x + 5$ y el último valor de la última columna corresponde al resto $r(x) = 0$.

En este tipo de divisiones, el resto siempre será constante o el polinomio nulo, y el grado del cociente será uno menos que el del dividendo.

Teorema del resto

El resto de la división de un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, es igual a $p(\alpha)$.

Verifiquemos esto para la división que acabamos de resolver. En este caso, $p(x) = 3x + 2x^3 - 5$ y $\alpha = 1$.

$p(1) = 3.1 + 2.1^3 - 5 = 3 + 2 - 5 = 0$, lo que coincide con $r(x) = 0$.

2.3. Práctica 2

1) Resolver las siguientes divisiones:

a) $(-10x^4):(5x)$

b) $(6x^3-12x^2+3x):(-3x)$

c) $(-10x^7):(4x^2)$

d)$(\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^4+\frac{1}{4}x^3-2x^2):(\frac{1}{2}x)$

e)$(-\frac{1}{3}x^6+x^5-2x^4+6x^3):(3x^3)$

2) Hallar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a)$(2x^3-4x^2-5x-3):(x+1)$

b)$(x^3-6x^2+2):(\frac{1}{3}x+1)$

c)$(5x^3-4x-3):(x^2-x)$

d)$(2x^5+x^4-3x^3+x^2):(x^3-x+1)$

3) Resolver las siguientes divisiones usando la regla de Ruffini y verificar con el Teorema del resto.

a) $(3x^4-2x^2+5x+1):(x-2)$

b) $(x^5+2x^3+3x^2+2):(x+1)$

c) $(x^4-81):(x+3)$

4) Dados los polinomios $p(x)=-3x^3+2x^2-4,\quad q(x)=4x^2-5x+1\ \ y\ \ r(x)=x+2$

Resolver las siguientes operaciones:

a) $p(x)+q(x).\,r(x)$

b)$p(x).\,r(x).\,q(x)$

c)$[p(x)+3q(x)].\,r(x)$

5) Indicar cuáles de los siguientes polinomios son divisbles por $q(x)=x+2$

a)x^5+32

b)$4x^3+5x-x$

c)$16-x^4$

6) Determina el valor de la constante k, de modo que 2 sea raíz del polinomio $p(x)=x^4+3kx^3-6x^2-12$.

7) Determina el valor de la constante k, de modo que el resto de dividir $p(x)=kx^3-4x^2+6x-1$ por $q(x)=x-3$ dé 62.

3. Factorización

Factorizar o **factorear** un polinomio es el proceso de expresarlo como el producto de dos o más factores,

Dado que los polinomios son expresiones algebraicas, podremos usar todos los métodos de factorización vistos en el capítulo 4.

A continuación, veremos otros métodos específicos para factorizar polinomios.

3.1. Conociendo sus raíces

Un número real α es **raíz** de un polinomio $p(x)$ si y sólo si $p(\alpha) = 0$. Por el Teorema del resto, $p(\alpha) = 0$ si y sólo si el resto de dividir al polinomio $p(x)$ por $x - \alpha$ es 0, resultando así $p(x)$ **divisible** por $x - \alpha$.

En conclusión:

α *es **raíz** de* $p(x)$ *si y sólo si* $p(x)$ *es **divisible** por* $x - \alpha$

Esto nos brinda una herramienta para factorizar polinomios conociendo sus raíces. Como vimos, si α es una raíz de $p(x)$, $p(x)$ resulta divisible por $x - \alpha$, con lo cual, el resto será 0, y si el cociente de la división es $c(x)$, entonces:

$$p(x) = (x - \alpha).\, c(x)$$

lo que nos permite expresar a $p(x)$ como un producto de dos factores.

Ejemplos

1) $p(x) = x^2 + 2x + 1$ es un trinomio cuadrado perfecto, sabemos que p puede escribirse en la forma
$p(x) = (x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1) = (x - (-1)) \cdot (x - (-1))$.
Luego, $x = -1$ es dos veces raíz del polinomio p. Decimos que $x = -1$ es raíz doble de p (decimos también que $x = -1$ es una raiz de multiplicidad 2)

2) $p(x) = 4x^4 - 32x^2 + 64 =$

$= 4.(x^4 - 8x^2 + 16) = \longleftarrow$ Factor común

$= 4.(x^2 - 4)^2 = \longleftarrow$ Trinomio cuadrado perfecto

$= 4.[(x - 2).\,(x + 2)]^2 = \longleftarrow$ Diferencia de cuadrados

$= 4.(x - 2)^2.\,(x + 2)^2$

$= 4 \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x + 2)$

$= 4 \cdot (x - 2) \cdot (x - 2) \cdot (x - (-2)) \cdot (x - (-2))$

Luego, $x = 2$ y $x = -2$ son raíces dobles (ó raíces de multiplicidad 2) de p.

3) El polinomio $p(x) = 3x^4 - 9x^3 + 3x^2 + 9x - 6$ tiene como raíz a 1, ya que $p(1) = 3.1^4 - 9.1^3 + 3.1^2 + 9.1 - 6 = 3 - 9 + 3 + 9 - 6 = 0$.

Realicemos entonces la división $p(x) : (x - 1)$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 3 & -9 & 3 & 9 & -6 \\ 1 & & 3 & -6 & -3 & 6 \\ \hline & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 \end{array} \leftarrow p(x) = (x-1).\underbrace{(3x^3 - 6x^2 - 3x + 6)}_{c(x)}$$

Así, si el cociente de dividir $p(x)$ por $x - 1$ es $c(x) = 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6$, nos queda:

$$p(x) = (x - 1).\,(3x^3 - 6x^2 - 3x + 6)$$

Observemos que $c(x)$ también tiene como raíz a 1, pues $c(1) = 3.1^3 - 6.1^2 - 3.1 + 6 = 3 - 6 - 3 + 6 = 0$.

Luego, podemos realizar la división de $c(x)$ por $x - 1$.

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 3 & -6 & -3 & 6 \\ 1 & & 3 & -3 & -6 \\ \hline & 3 & -3 & -6 & \end{array} \leftarrow c(x) = (x-1).\underbrace{(3x^2 - 3x - 6)}_{c_1(x)}$$

Por lo tanto, si el cociente de dividir $c(x)$ por $x-1$ es $c_1(x) = 3x^2 - 3x - 6$, resulta: $c(x) = (x-1).(3x^2 - 3x - 6)$.

A su vez, $c_1(x) = 3x^2 - 3x - 6$ tiene como raíz a -1, pues $c_1(-1) = 3.(-1)^2 - 3.(-1) - 6 = 3 + 3 - 6 = 0$. Hacemos entonces la división $c_1(x) \div (x+1)$:

$$\begin{array}{r|rr|r} & 3 & -3 & -6 \\ -1 & & -3 & 6 \\ \hline & 3 & -6 & 0 \end{array} \leftarrow c_1(x) = (x+1).\underbrace{(3x-6)}_{c_2(x)}$$

Luego, $c_1(x) = (x-(-1)).(3x-6) = (x+1).3.(x-2)$.

Finalmente, podemos escribir a $p(x)$ factorizado completamente:

$p(x) = (x-1).(3x^3 - 6x^2 - 3x + 6) =$

$\quad = (x-1).(x-1).(3x^2 - 3x - 6) =$

$\quad = (x-1).(x-1).3.(x+1).(x-2) =$

$\quad = 3.(x-1)^2.(x+1).(x-2)$

Sus raíces son $x = 1$ doble (o de multiplicidad 2), $x = -1$ y $x = 2$.

Todo este proceso se puede resumir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|rrrr|rl} & 3 & -9 & 3 & 9 & -6 & \\ 1 & & 3 & -6 & -3 & 6 & \\ \hline & 3 & -6 & -3 & 6 & 0 & \leftarrow p(x) = (x-1).\underbrace{(3x^3-6x^2-3x+6)}_{c(x)} \\ 1 & & 3 & -3 & -6 & & \\ \hline & 3 & -3 & -6 & 0 & & \leftarrow p(x) = (x-1).\overbrace{(x-1).\underbrace{(3x^2-3x-6)}_{c_1(x)}}^{c(x)} \\ -1 & & -3 & 6 & & & \\ \hline & 3 & -6 & 0 & & & \leftarrow p(x) = (x-1).(x-1).\overbrace{(x+1).\underbrace{(3x-6)}_{c_2(x)}}^{c_1(x)} \end{array}$$

$$\boxed{p(x) = 3.(x-1)^2.(x+1).(x-2)}$$

3.2. De polinomios cuadráticos

Para hallar las raíces de un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ podemos usar la fórmula resolvente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Luego, podemos expresar al polinomio $p(x)$ en forma factorizada como $p(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

Ejemplo:

Factorizar el polinomio $t(x) = x^2 - x - 6$.

Con la fórmula resolvente hallamos las raíces de $t(x)$:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$
$$x_1 = \frac{1 + 5}{2} \text{ o } x_2 = \frac{1 - 5}{2}$$
$$x_1 = 3 \text{ o } x_2 = -2$$

Luego, las raíces de $t(x)$ son $x_1 = 3$ y $x_2 = -2$ y su coeficiente principal es $a = 1$; resulta entonces:
$t(x) = 1 \cdot (x - 3) \cdot (x - (-2)) = (x - 3) \cdot (x + 2)$

3.3. Práctica 3

Factorizar los siguientes polinomios

a) $p(x) = 2x^3 - \frac{8}{9}x$

b) $p(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

c) $p(x) = x^2 + 5x + 6$

d) $p(x) = 3x^4 + 15x^3 - 18x^2$

e) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

f) $p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

g) $p(x) = -2x^5 - 6x^4 - 6x^3 - 2x^2$

h) $p(x) = x^5 + 6x^4 + 9x^3 - x^2 - 6x - 9$

i) $p(x) = 2x^6 - 16x^3$

4. Expresiones algebraicas racionales

Las **expresiones algebraicas racionales**, también conocidas como **expresiones algebraicas fraccionarias** o **fracciones algebraicas**, se expresan como el cociente entre dos polinomios, es decir:

$R(x)$ es una expresión algebraica racional si $R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

Notar que una expresión de este tipo está definida para todos los valores reales de x tales que $q(x) \neq 0$.

Ejemplos

1) $P(x) = \dfrac{5x^3 - 2x + 1}{x - 4}$ es una expresión algebraica fraccionaria definida $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq 4$.

2) $Q(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ es una expresión algebraica fraccionaria definida $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq \pm 3$.

3) $R(x) = \dfrac{-x^4 + 3x}{x^2 + 2x + 1}$ es una expresión algebraica fraccionaria definida $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x \neq -1$.

4.1. Operaciones con expresiones algebraicas racionales

A continuación veremos las operaciones: suma, resta, multiplicación y división.

4.2. Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Para simplificar una fracción algebraica, primero se factoriza el numerador y el denominador. Luego, se identifican y restringen los valores de la variable para evitar divisiones por cero, y finalmente se cancelan los factores comunes, si los hay.

Ejemplos

a) Simplificar: $\dfrac{3x+6}{x+2}$

$$\frac{3x+6}{x+2} = \frac{3(x+2)}{(x+2)} = 3 \qquad \text{con } x \neq -2$$

b) Simplificar: $\dfrac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$

$$\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x+4)}{(x+2)} \qquad \text{con } x \neq -2 \text{ y } x \neq 3$$

c) Simplificar: $\dfrac{x-1}{1-x}$

$$\frac{x-1}{1-x} = \frac{(-1)(-x+1)}{(1-x)} = \frac{(-1)(1-x)}{(1-x)} = -1 \qquad \text{con } x \neq 1$$

4.3. Múltiplo Común Menor de varios polinomios

El **múltiplo común menor** de varios polinomios será aquel polinomio de menor grado posible que es simultáneamente divisible por cada uno de ellos.

Ejemplo

Encontrar el múltiplo común menor de los polinomios: $p(x) = x^2 - 1; q(x) = x^2 - 2x + 1; r(x) = x$

1º.- Debemos factorizar cada uno de los polinomios dados:

$p(x) = x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ (diferencia de cuadrados)
$q(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ (trinomio cuadrado perfecto)
$r(x) = x = x$

2º.- El múltiplo común menor entre los tres polinomios será el polinomio resultante del producto de todos los factores a su mayor exponente, o sea: $mcm(p(x), q(x), r(x)) = (x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot x$

4.4. Suma y resta de expresiones algebraicas racionales

El procedimiento para sumar o restar expresiones algebraicas racionales es análogo al de la suma y resta de fracciones numéricas.

Si las expresiones tienen en mismo denominador
Se suman o restan, según corresponda, los numeradores y conserva el mismo denominador. Luego, si es posible, se simplifica el resultado.

Ejemplos

a) Resolver: $\frac{4x^2}{x+4} + \frac{16x}{x+4}$

1º.- Vemos para qué valores de la variable x está definida la expresión.

El denominador no puede anularse por lo que, para encontrar la restricción de la variable, planteamos y resolvemos la ecuación:

$$x + 4 = 0$$

$$x = -4$$

Luego, la expresión está definida para todo número real distinto de -4. En símbolos, podemos escribir $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$ o $\forall x \in \mathbb{R}/x \neq -4$

2º.- Resolvemos la operación.

$$\frac{4x^2}{x+4} + \frac{16x}{x+4} =$$

$$= \frac{4x^2 + 16x}{x+4} =$$

$$= \frac{4x(x+4)}{x+4} = 4x \text{ con } \forall x \in \mathbb{R}/x \neq -4$$

b) Resolver: $\frac{4x+7}{x+6} - \frac{2x+8}{x+6}$

1º.- Vemos para qué valores de la variable x está definida la expresión.

$$x + 6 = 0$$

$$x = -6$$

Por lo tanto, está definida $\forall x \in \mathbb{R}/x \neq -6$

2º.- Resolvemos la operación.

$$\frac{4x+7}{x+6} - \frac{2x+8}{x+6} =$$

$$= \frac{4x+7-(2x+8)}{x+6} =$$

$$= \frac{4x+7-2x-8}{x+6} =$$

$$= \frac{2x-1}{x+6} \text{ con } \forall x \in \mathbb{R}/x \neq -6$$

Si las expresiones tienen distinto denominador

Antes de sumar o restar expresiones racionales con denominadores distintos, necesitas encontrar el múltiplo común menor entre los denominadores y expresar cada fracción con este denominador.

Ejemplo

Resolver: $\dfrac{x+1}{x^2-9}+\dfrac{x}{x+3}$

1º.- Calculamos el múltiplo común menor de los denominadores.

$$(x^2-9)=(x+3)\cdot(x-3)$$

$$x+3=x+3$$

$$mcm(x^2-9;\ x+3)=(x+3)\cdot(x-3)$$

2º.- Vemos para qué valores de la variable x está definida la expresión.

$$x-3=0$$

$$x=3$$

$$x+3=0$$

$$x=-3$$

Por lo tanto, $\forall x\in\mathbb{R}/x\neq\pm3$ (ó $\forall x\in\mathbb{R}-\{-3,3\}$)

3º.- Para cada expresión buscamos una expresión equivalente cuyo denominador sea el mcm hallado en el 1º paso.

$\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+1}{(x+3)\cdot(x-3)}$ (No es necesario realizar más ajustes, dado que el denominador ya es el mínimo común múltiplo calculado.)

$\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}$ (Multiplicamos el numerador y el denominador por $x-3$, que es el factor necesario para que el denominador se convierta en el múltiplo común menor calculado.)

4º.- Resolvemos la operación.

$$\frac{x+1}{x^2+9}+\frac{x}{x+3}=$$

$$=\frac{x+1}{(x+3)\cdot(x-3)}+\frac{x\cdot(x-3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=$$

$$=\frac{(x+1)+(x^2-3x))}{(x+3)\cdot(x-3)}=$$

$$=\frac{x^2-2x+1}{(x+3)\cdot(x-3)}=$$

$=\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-9}$ con $\forall x\in\mathbb{R}/x\neq\pm3$

4.5. Multiplicación y división de expresiones algebraicas racionales

Multiplicación

Para multiplicar dos o más fracciones algebraicas, el numerador del producto se obtiene multiplicando los numeradores de cada fracción, y el denominador del producto se obtiene multiplicando los denominadores de cada fracción. Siempre que sea posible, es recomendable simplificar cada fracción antes de realizar la multiplicación para facilitar los cálculos. Además, al igual que en la suma y la resta de fracciones, es importante considerar las restricciones de la variable.

Ejemplo

Resolver $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{3x + 6}{(x + 2)^2}$

1º.- Buscamos la restricción de la variable, es decir, los valores de la variable que anulan los polinomios del denominador.

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{1}$$

$$|x| = 1$$

$$x = \pm 1$$

$$(x + 2)^2 = 0$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Luego, la expresión está definida $\forall x \in \mathrm{R} - \{-2, -1, 1\}$

2º.- Multiplicamos. Previamente, si es posible, simplificamos.

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} \cdot \frac{3x + 6}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{x \cdot (x - 1)}{(x - 1) \cdot (x + 1)} \cdot \frac{3 \cdot (x + 2)}{(x + 2)^2} =$$

$$= \frac{x}{(x + 1)} \cdot \frac{3}{(x + 2)} =$$

$$= \frac{3x}{(x + 1)(x + 2)}$$

División

Para dividir dos fracciones algebraicas, se debe multiplicar la fracción de la izquierda del signo de división por el recíproco de la fracción que está a la derecha del signo. Luego, se realiza la multiplicación de las fracciones resultantes. Al igual que en las operaciones de suma, resta y multiplicación, es crucial considerar las restricciones de la variable.

Ejemplo

Resolver $\dfrac{x^2}{3x^2 + 2x} \div \dfrac{x + 3}{3x^2 + 11x + 6}$

1º.- Buscamos la restricción de la variable, es decir, los valores de la variable que anulan los polinomios del denominador y que anulan la fracción a la derecha del signo.

$$3x^2 + 2x = 0$$

$x(3x + 2) = 0$

$x = 0$ o $3x + 2 = 0$

$x = 0$ o $x = -\frac{2}{3}$

$x + 3 = 0$

$x = -3$

$3x^2 + 11x + 6 = 0$

$3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x + 3) = 0$

$x + \frac{2}{3} = 0$ o $x + 3 = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ o $x = -3$

Luego, la expresión está definida $\forall x \in \mathrm{R} - \{-3, -\frac{2}{3}, 0\}$

2º.- Multiplicamos la fracción a la izquierda del signo de la división por el recíproco de la fracción a la derecha del signo.

$$\frac{x^2}{3x^2 + 2x} \cdot \frac{3x^2 + 11x + 6}{x + 3}$$

3º.- Multiplicamos. Previamente, si es posible, simplificamos.

$$\frac{x^2}{3x^2 + 2x} \cdot \frac{3x^2 + 11x + 6}{x + 3} =$$

$$= \frac{x^2}{3 \cdot x \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot (x + 3)}{(x + 3)} =$$

$$= \frac{x}{3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)} \cdot \frac{3 \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)}{1} =$$

$$= \frac{3 \cdot x \cdot \left(x + \frac{2}{3}\right)}{3\left(x + \frac{2}{3}\right)} =$$

$$= x \qquad \forall x \in \mathrm{R} - \{-3, -\frac{2}{3}, 0\}$$

4.6. Práctica 4

1) Simplificar las siguientes expresiones algebraicas fraccionarias, restringiendo la variable.

a) $\dfrac{x^2-9}{2x^2+6x}$

b) $\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^3+x^2-2x}$

c) $\dfrac{x^4-2x^3-5x+10}{x^5-7x^4+10x^3}$

d) $\dfrac{3x^3-9x^2}{5x^2-15x}$

2) En cada caso, calcular el múltiplo común menor:

a) $p(x)=(x-2)^2\cdot(x+3)$; $q(x)=x+2$

b) $p(x)=(x+1)^2\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)$; $q(x)=(x-1)\cdot(x+1)^3\cdot(x^2+1)^2$

c) $p(x)=x^2-9$; $q(x)=x^2+6x+9$

d) $p(x)=x^2-4$; $q(x)=x-2$; $r(x)=x^2$

e) $p(x)=x^2+x-2$; $q(x)=x^3+2x^2-x-2$; $r(x)=x^2+4x+4$

f) $p(x)=x^2+5x+6$; $q(x)=x^3+7x^2+15x+9$

3) Resolver las siguientes sumas y restas, restringiendo la variable:

a) $\dfrac{x}{x+3}+\dfrac{3}{3x+9}$

b) $\dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}-\dfrac{x^3}{x^2+3x}$

c) $\dfrac{2x}{3x+3}+\dfrac{4}{x+1}-\dfrac{5x+1}{x^2-1}$

d) $-\dfrac{3}{x}-\dfrac{x+1}{x^3+x}+2$

4) Resolver las siguientes multiplicaciones y divisiones, restringiendo la variable:

a) $\dfrac{x^4-2x^3}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2+4x}{x^2+4x+4}$

b) $\dfrac{x^3+x^2-6x}{x^6+3x^5-10x^4}:\dfrac{x^3+3x^2-9x-27}{x-25}$

c) $\dfrac{4-x^2}{2x-4}\cdot\dfrac{3x+6}{x-2}:\dfrac{x^2+4x+4}{4x}$

d) $\dfrac{3x^2-3x-6}{x^2-9}:\dfrac{2x^2+8x+6}{x^2+2x-15}\cdot\dfrac{2x}{x+3}$

5) Resolver las siguientes operaciones combinadas, restringiendo la variable:

a) $x+\dfrac{3x-1}{2x+6}\cdot\dfrac{x^2+x-6}{x-1}$

b) $\dfrac{x-1}{x^2-4}:\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{2x-4}{x}:(x-2)$

c) $\left[\dfrac{2}{x+3}+\dfrac{x}{x-2}\right]\cdot\dfrac{4x+12}{2x^2}$

d) $1-\dfrac{2x^2-4x-6}{x+2}:\dfrac{x^2+4x+3}{2}$

5. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

5.1. Práctica 1

1)

a) No es polinomio.

b) Es polinomio. Binomio.

c) Es polinomio. Trinomio.

d) No es polinomio.

e) Es polinomio. Binomio.

f) Es polinomio. Trinomio.

2)

a) $x^3 + 7x^2 - 3x - 3$ Polinomio de grado 3, coeficiente principal 1, término independiente -3

b) $-3x^5 + 0x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 0x + 7$ Polinomio de grado 5, coef. principal -3, término independiente 7

c) $7x^2 - 7x + 0$ Polinomio de grado 2, coeficiente principal 7, término independiente 0

d) $x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 6$ Polinomio de grado 4, coeficiente principal 1, término independiente 6

e) $-x^3 + 0x^2 - 5x - 4$ Polinomio de grado 3, coeficiente principal -1, término independiente -4

3)

a) $a = -9 \; y \; b = 3$

b) $a = 0, b = -6 \; y \; c = 10$

4)

a) $\alpha = 1$ es raíz de $p(x)$ porque $p(1) = 0$

b) $\alpha = -2$ no es raíz de $q(x)$ porque $q(-2) \neq 0$

c) $\alpha = -5$ es raíz de $r(x)$ porque $r(-5) = 0$

5)

a) $\alpha = \frac{5}{6}$

b) $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 3$

c) $\alpha_1 = 0$ y $\alpha_2 = 1$

d) $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = -1$ y $\alpha_3 = 2$

e) $\alpha = 2$

5.2. Práctica 2

1)

a) $-2x^3$

b)$-2x^2+4x-1$

c) $-\frac{5}{2}x^5$

d) $\frac{2}{5}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x$

e) $-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+2$

2)

a) $C(x)=2x^2-6x+1,\ R(x)=-4$

b) $C(x)=3x^2-27x+81,\ R(x)=-79$

c) $C(x)=5x+5,\ R(x)=x-3$

d) $C(x)=2x^2+x-1,\ R(x)=-2x+1$

3)

a) $C(x)=3x^3+6x^2+10x+25,\ R(x)=51\ y\ P(2)=51$

b) $C(x)=x^4-x^3+3x^2,\ R(x)=2\ y\ P(-1)=2$

c) $C(x)=x^3-3x^2+9x-27,\ R(x)=0\ y\ P(-3)=0$

4)

a) $p(x)+q(x).\,r(x)=x^3+5x^2-9x-2$

b) $p(x).\,q(x).\,r(x)=-12x^6-x^5+33x^4-40x^3-8x^2+36x-8$

c) $[p(x)+3q(x)].\,r(x)=-3x^4+8x^3+13x^2-31x-2$

5)

a) Sí es divisible

b) No es divisible

c) Sí es divisible

6)$k=\frac{5}{6}$

7) $k=3$

5.3. Práctica 3

a) $p(x) = 2x(x - \frac{2}{3})(x + \frac{2}{3})$

b) $p(x) = x^3 - x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} =$

$= x^2.(x-1) + \frac{2}{3}(x-1) =$
$= (x-1)(x^2 + \frac{2}{3})$

c) $p(x) = (x+3)(x+2)$

d) $p(x) = 3x^2(x+6)(x-1)$

e) $p(x) = (x+3)(x-2)(x+2)$

f) $p(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

g) $p(x) = -2x^2(x+1)^3$

h) $p(x) = (x-1)(x+3)^2(x^2+x+1)$

i) $p(x) = 2x^3(x-2)(x^2+2x+4)$

5.4. Práctica 4

1)

a) $\frac{x-3}{2x}$, $\forall x \neq -3, 0$

b) $\frac{x-1}{x+2}$, $\forall x \neq -2, 0, 1$

c) $\frac{x^3-5}{x^3(x-5)}$, $\forall x \neq 0, 2, 5$

d) $\frac{3x}{5}$, $\forall x \neq 0, 3$

2)

a) $mcm(p(x), q(x)) = (x+2)(x-2)^2(x+3)$

b) $mcm(p(x), q(x)) = (x-1)\cdot(x+1)^3\cdot(x+2)\cdot(x^2+1)^2$

c) $mcm(p(x), q(x)) = (x-3)\cdot(x+3)^2$

d) $mcm(p(x), q(x), r(x)) = (x+2)\cdot(x-2)\cdot x^2$

e) $mcm(p(x), q(x), r(x)) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)^2$

f) $mcm(p(x), q(x)) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)^2$

3)

a) $\frac{x+1}{x+3}$, $\forall x \neq -3$

b) $\frac{x-x^2}{x+3}$, $\forall x \neq -3, 0, 2$

c) $\frac{2x^2-5x-15}{3x^2-3}$, $\forall x \neq -1, 1$

d) $\frac{2x^3-3x^2+x-4}{x^3+x}$, $\forall x \neq 0$

4)

a) $\frac{x^4(x+4)}{(x+2)^3}$, $\forall x \neq -2, 2$

b) $\frac{x-25}{x^6+5x^5-9x^4-45x^3}$, $\forall x \neq -3, -5, 0, 2, 3, 25$

c) $-\frac{6x}{x-2}$, $\forall x \neq -2, 0, 2$

d) $\frac{3x(x^2+3x-10)}{(x+3)^3}$, $\forall x \neq -5, -3, -1, 3$

5)

a) $\dfrac{5x^2-9x+2}{2x-2},\ \forall x \neq -3, 1$

b) $\dfrac{3x^2-3x-4}{x^3-x^2-2x},\ \forall x \neq -2, -1, 0, 2$

c) $\dfrac{2x^2+10x-8}{x^3-2x^2},\ \forall x \neq -3, 0, 2$

d) $\dfrac{x^2+x+18}{x^2+5x+6},\ \forall x \neq -3, -2, -1$

Geometría

Tabla de contenidos

1. Ángulos

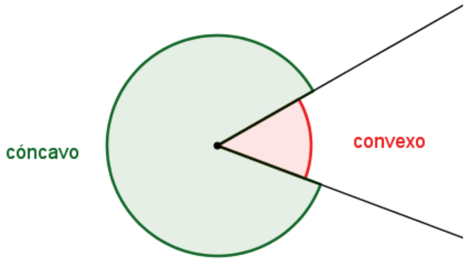
En las siguientes páginas abordaremos el concepto de ángulo plano, sus elementos característicos, las formas de nombrarlo, los sistemas de medición de ángulos. Además veremos ciertos pares de ángulos particulares.

1.1. Concepto

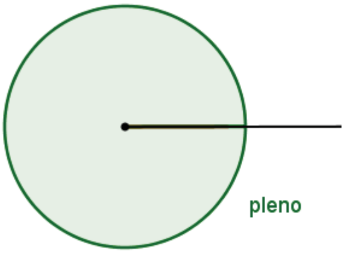
Dadas dos semirrectas con el mismo origen pueden darse dos situaciones:

- **Las semirrectas no están contenidas en la misma recta**. En este caso, determinan dos subconjuntos de puntos del plano.

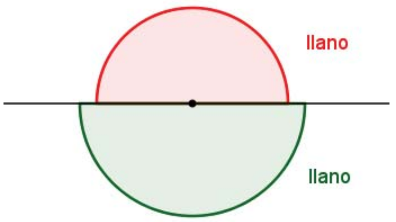
La unión del conjunto de puntos que conforman las semirrectas con cada uno de los mencionados subconjuntos recibe el nombre de ángulo. Uno de ellos es un ángulo convexo y el otro un ángulo cóncavo.



- **Las semirrectas están contenidas en la misma recta** pudiendo ocurrir que:
  - **Sean coincidentes:** En este caso, uno de los subconjuntos es la semirrecta que se denomina ángulo nulo. La otra región es todo el plano, que se denomina ángulo pleno.



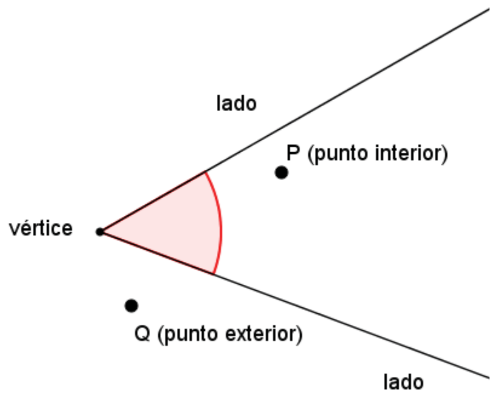
  - **Sean opuestas:** en este caso cada subconjunto es un semiplano que se denomina ángulo llano.



1.2. Elementos

Entre los elementos de un ángulo se encuentran:

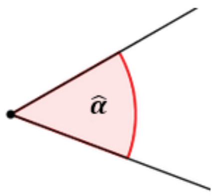
- **Vértice:** origen común de las dos semirrectas.
- **Lado:** cada una de las dos semirrectas.
- **Punto interior:** todo punto que pertenece al ángulo pero no a sus lados.
- **Punto exterior:** todo punto que no pertenece al ángulo.



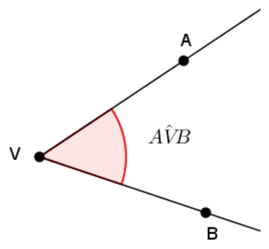
1.3. Notación

Para nombrar a un ángulo podemos usar:

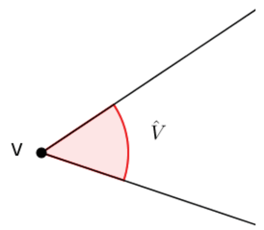
- Letras griegas.



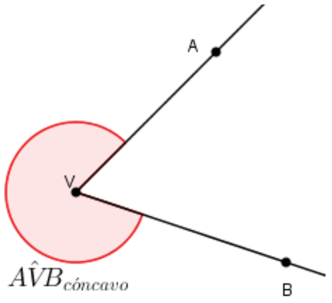
- Tres puntos: el vértice y un punto perteneciente a cada uno de los lados poniendo siempre en el medio (debajo del acento) la letra que nombra al vértice del ángulo.



- El vértice (si no se presta a confusión respecto al ángulo al cual se hace referencia)



<u>Nota:</u> Cuando no aclaremos nada, el ángulo nombrado será el convexo. Si el ángulo es cóncavo, haremos la aclaración junto al nombre del ángulo. Por ejemplo:



1.4. Sistemas de medición

Los ángulos pueden ser medidos. A continuación veremos dos de los sistemas más comunes para expresar medidas angulares. Estos son el **sistema sexagesimal** y el **sistema circular**.

Sistema sexagesimal

Su unidad de medida angular es el ***grado sexagesimal***. Un grado sexagesimal, 1°, es la amplitud del ángulo que es la 360 ava parte del ángulo pleno.

$$1^\circ = \frac{1 \ \acute{a}ngulo\ pleno}{360}$$

Este sistema admite ***submúltiplos***:

- El ***minuto sexagesimal***, $1'$ es la 60 ava parte del grado sexagesimal.

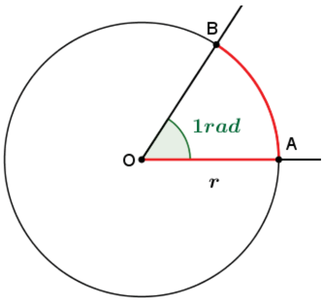
$$1' = \frac{1^\circ}{60} \to 1^\circ = 60'$$

- El ***segundo sexagesimal***, $1\ ''$ es la 60 ava parte del minuto sexagesimal.

$$1\ '' = \frac{1'}{60} \to 1' = 60\ ''$$

Sistema circular

Su unidad es el ***radian***. Un radian, $1\ rad$, es la amplitud del ángulo central de una circunferencia (ángulo con vértice en el centro de la circunferencia) para el cual la longitud del arco abarcado es igual al radio de la circunferencia.



La medida en radianes de un ángulo indica la cantidad de veces que la longitud del radio cabe en el arco abarcado por el ángulo, esto es:

$$x\ rad = \frac{longitud\ arco}{radio}$$

Ejemplo:

En una circunferencia de radio $r = 2\ cm$, calcular la longitud del arco subtendido por un ángulo central de 33º.

Sabemos que: $x\ rad = \dfrac{longitud\ arco}{radio}$

Como en esta relación el ángulo debe estar expresado en radianes, expresaremos la amplitud del ángulo dado en radianes:

$$360^\circ \_\_\_\_\_\_ 2\pi\ rad$$

$$33^\circ \_\_\_\_\_\_ x\ rad \ \to \ x\ rad = \frac{33^\circ \cdot 2\pi\ rad}{360^\circ} = \frac{11}{60}\pi\ rad$$

Luego, aplicaremos la relación anterior teniendo en cuenta que el radio es $r = 2\ cm$:

$$\frac{11}{60}\pi\ rad = \frac{longitud\ arco}{2\ cm}$$

Tendremos entonces que la longitud del arco es:

$$longitud\ arco = \frac{11}{60}\pi\ rad \cdot 2\ cm \approx 1,15\ cm$$

Correspondencia entre ambos sistemas de medición

Podemos establecer una correspondencia entre ambos sistemas de medición de ángulos. Siendo que la longitud de una circunferencia de radio r es de $2\pi r$, resulta que:

En radianes, el ángulo central correspondiente es de: $x\ rad = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi\ rad$

En grados sexagesimales, por tratarse de un ángulo pleno, el ángulo central correspondiente es de 360°.

Aplicando regla de tres simple es posible dada la medida de un ángulo en grados sexagesimales obtener su amplitud en radianes y viceversa:

$$360^\circ \_\_\_\_\_\_ 2\pi\ rad$$
$$\alpha^\circ \_\_\_\_\_\_ x\ rad \ \rightarrow\ x\ rad = \frac{\alpha^\circ \cdot 2\pi\ rad}{360^\circ}$$

$$2\pi\ rad \_\_\_\_\_\_ 360^\circ$$
$$x\ rad \_\_\_\_\_\_ \alpha^\circ \ \rightarrow\ \alpha^\circ = \frac{x\ rad \cdot 360^\circ}{2\pi\ rad}$$

Ejemplos:

a) Expresar 45° en el sistema radial.

$$360^\circ \_\_\_\_\_\_ 2\pi\ rad$$
$$45^\circ \_\_\_\_\_\_ x\ rad \ \rightarrow\ x\ rad = \frac{45^\circ \cdot 2\pi\ rad}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}\ rad$$

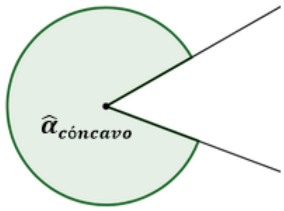
b) Expresar 1 radian en grados sexagesimales.

$$2\pi\ rad \_\_\_\_\_\_ 360^\circ$$
$$1\ rad \_\_\_\_\_\_ x^\circ \ \rightarrow\ x\ rad = \frac{1\ rad \cdot 360^\circ}{2\pi\ rad} \approx 57^\circ\ 17'\ 44,8''$$

1.5. Clasificación de ángulos según su amplitud

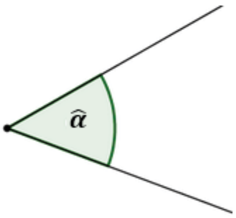
Los ángulos se pueden clasificar en:

- **Cóncavos:** cuando existe un par de puntos del ángulo de modo que el segmento que determinan no está contenido en el ángulo.



cóncavo

- **Convexos:** cuando el segmento determinado por dos puntos cualesquiera del ángulo está contenido en el ángulo.

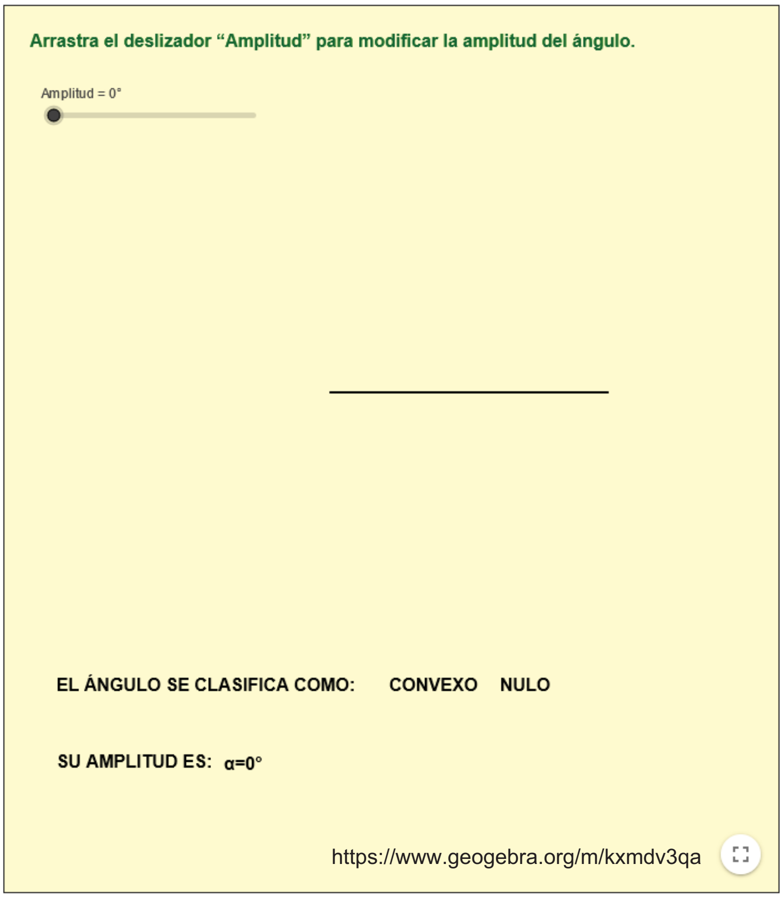


convexo

Un ángulo convexo puede clasificarse en:

- **Nulo:** su amplitud es de 0º ($0\ rad$).
- **Recto:** su amplitud es de 90º ($\frac{\pi}{2}\ rad$).
- **Llano:** su amplitud es de 180º ($\pi\ rad$).
- **Agudo:** su amplitud es mayor que 0º ($0\ rad$) y menor que 90º ($\frac{\pi}{2}\ rad$).
- **Obtuso:** su amplitud es mayor que 90º ($\frac{\pi}{2}\ rad$) y menor que 180º ($\pi\ rad$).
- **Pleno:** su amplitud es de 360º ($2\pi\ rad$).

En la siguiente actividad interactiva, utiliza el deslizador "Amplitud" para visualizar distintos ángulos y su clasificación.


Arrastra el deslizador “Amplitud” para modificar la amplitud del ángulo.
Amplitud = 0°
EL ÁNGULO SE CLASIFICA COMO: CONVEXO NULO
SU AMPLITUD ES: α=0°
https://www.geogebra.org/m/kxmdv3qa

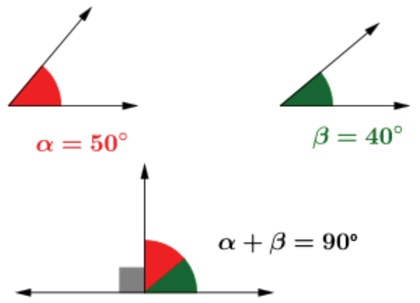
1.6. Pares de ángulos particulares

Complementarios

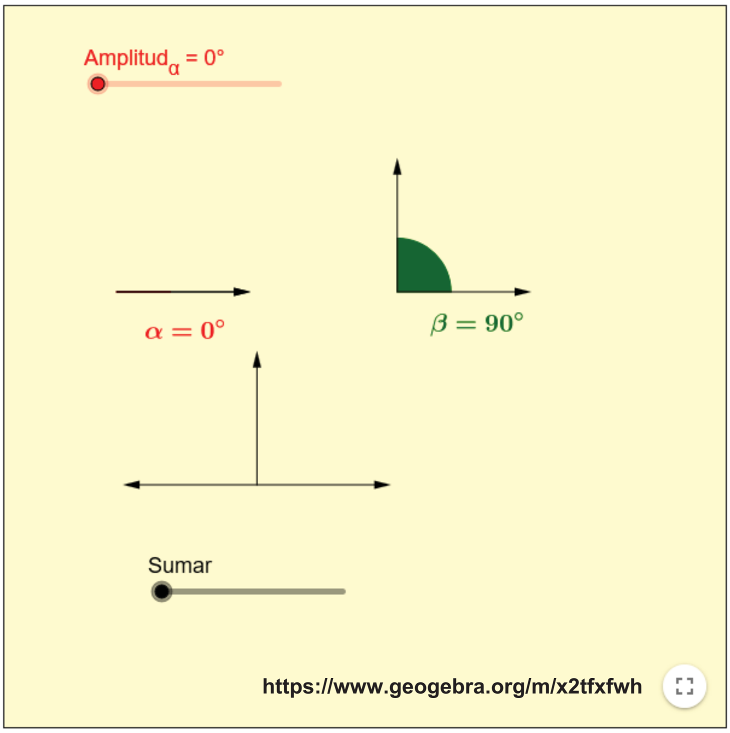
Dos ángulos son complementarios si su suma es un ángulo recto.

Ejemplo

$\alpha = 50º$ es el complemento de $\beta = 40º$



Arrastra el deslizador para modificar la amplitud del ángulo $\hat{\alpha}$. Quedará determinado su complemento, el ángulo $\hat{\beta}$. Arrastrando el deslizador suma visualizarás la suma de ambos ángulos.

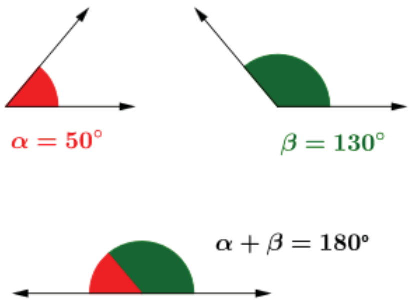


Suplementarios

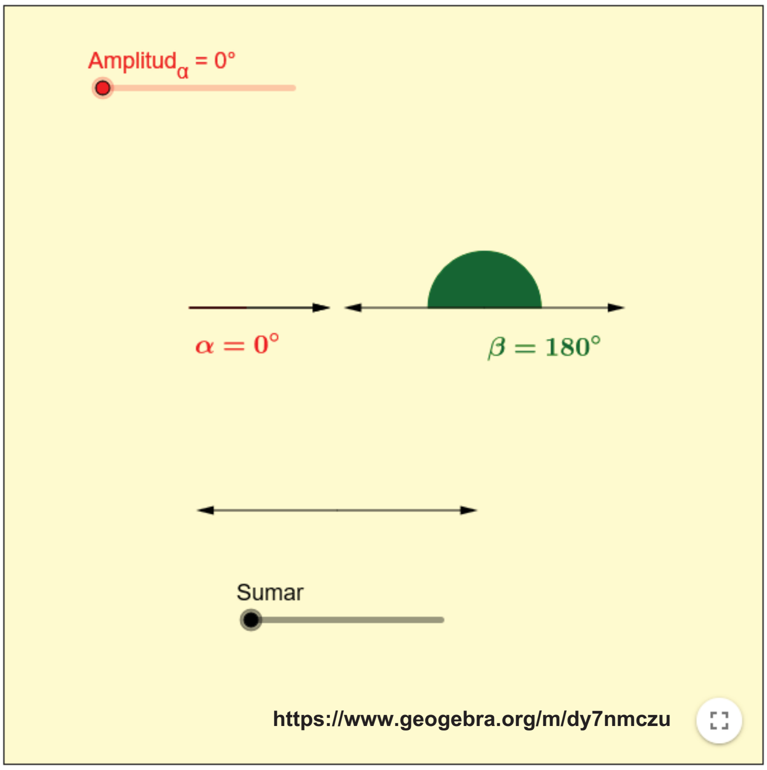
Dos ángulos son suplementarios si su suma es un ángulo llano.

Ejemplo

$\alpha = 50º$ es el suplemento de $\beta = 130º$



Arrastra el deslizador para modificar la amplitud del ángulo $\hat{\alpha}$. Quedará determinado su suplemento, el ángulo $\hat{\beta}$. Arrastrando el deslizador suma visualizarás la suma de ambos ángulos.

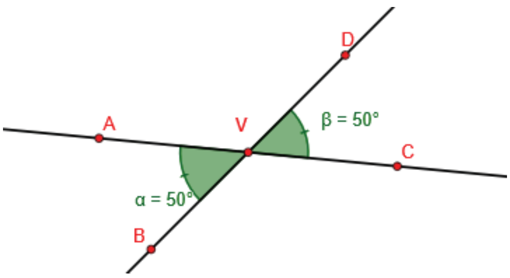


Opuestos por el vértice

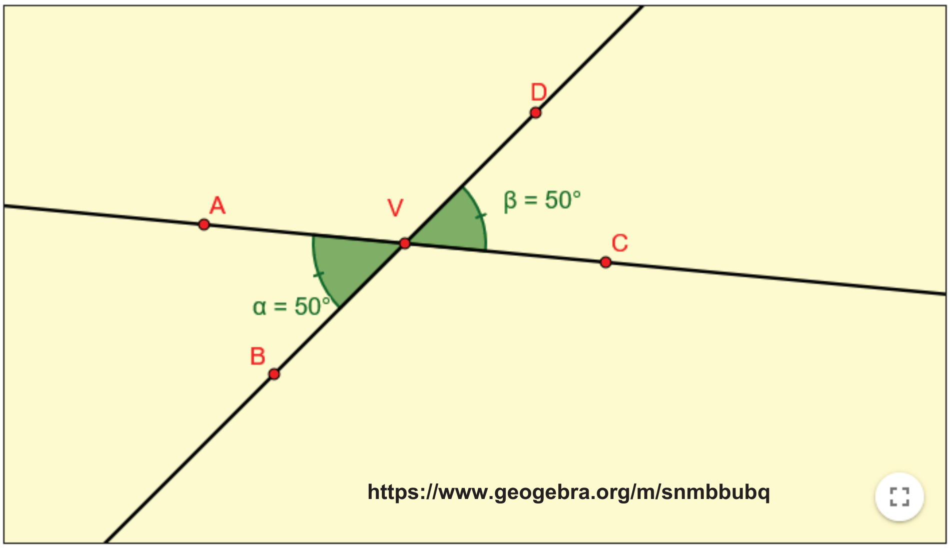
Dos ángulos son opuestos por el vértice si los lados de uno de ellos son semirrectas opuestas a los lados del otro.

Ejemplo

Los ángulos $\hat{\alpha} = A\hat{V}B$ y $\hat{\beta} = D\hat{V}C$ son opuestos por el vértice.



Arrastra los puntos A o B para visualizar distintos pares de ángulos opuestos por el vértice.



Propiedad:

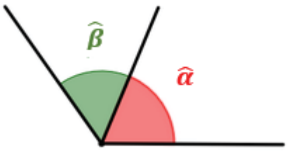
Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (tienen igual amplitud).

Consecutivos

Dos ángulos son consecutivos si tienen en común sólo el vértice y uno de sus lados**.**

Ejemplo

Los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son consecutivos.



Adyacentes

Dos ángulos son adyacentes si tienen en común sólo el vértice y uno de sus lados y el otro par de lados son semirrectas opuestas.

Ejemplo

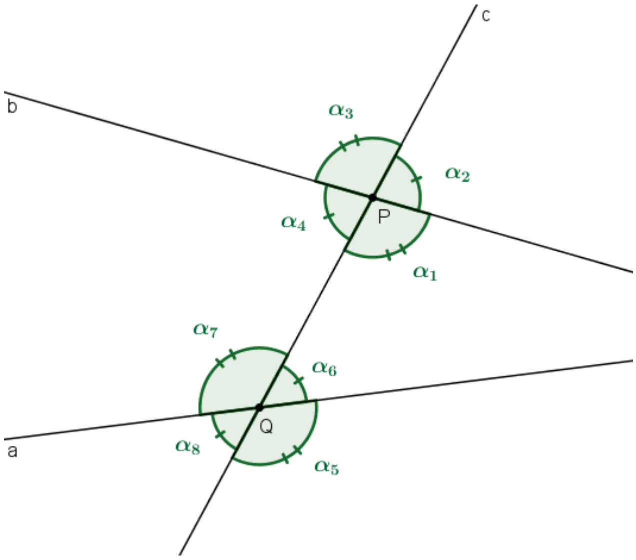
Los ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son adyacentes.

Propiedad:

Los ángulos adyacentes son consecutivos y suplementarios.

1.7. Ángulos determinados por dos rectas y una secante

Son los ocho ángulos formados al intersecar dos rectas, en la figura rectas a y b, con una secante a ellas, en la figura recta c. Un grupo de cuatro ángulos con vértice en P y otro grupo de cuatro con vértice en Q.



Dentro de cada grupo encontramos pares de ángulos opuestos por el vértice y pares de ángulos adyacentes. Además hay otros pares de ángulos, cada par formado por un ángulo con vértice en P y uno con vértice en Q, que reciben nombres especiales dependiendo de su ubicación en relación a las rectas (internos o externos) y a la secante (en el mismo o de distinto lado). Los mencionados pares son:

- ***Ángulos alternos*** pueden ser internos o externos:

  Alternos internos: son los que se encuentran a distinto lado de la secante y en la zona interior a las rectas paralelas. En la figura: α_1 y α_7; α_4 y α_6

  Alternos externos: son los que se encuentran a distinto lado de la secante y en la zona exterior a las rectas paralelas. En la figura: α_3 y α_5; α_2 y α_8

- ***Ángulos conjugados*** pueden ser internos o externos:

  Conjugados internos: son los que se encuentran del mismo lado de la secante y en la zona interior a las rectas paralelas. En la figura: α_1 y α_6; α_4 y α_7

  Conjugados externos: son los que se encuentran del mismo lado de la secante y en la zona exterior a las rectas paralelas. En la figura: α_2 y α_5; α_3 y α_8

- ***Ángulos correspondientes*** son los que se encuentran a un mismo lado de la secante, uno es externo y el otro interno. En la figura: α_2 y α_6; α_3 y α_7; α_1 y α_5; α_4 y α_8

CASO PARTICULAR: a y b SON PARALELAS

Si las rectas a y b son paralelas ($a \parallel b$) existe una relación entre las amplitudes de los mencionados pares de ángulos.

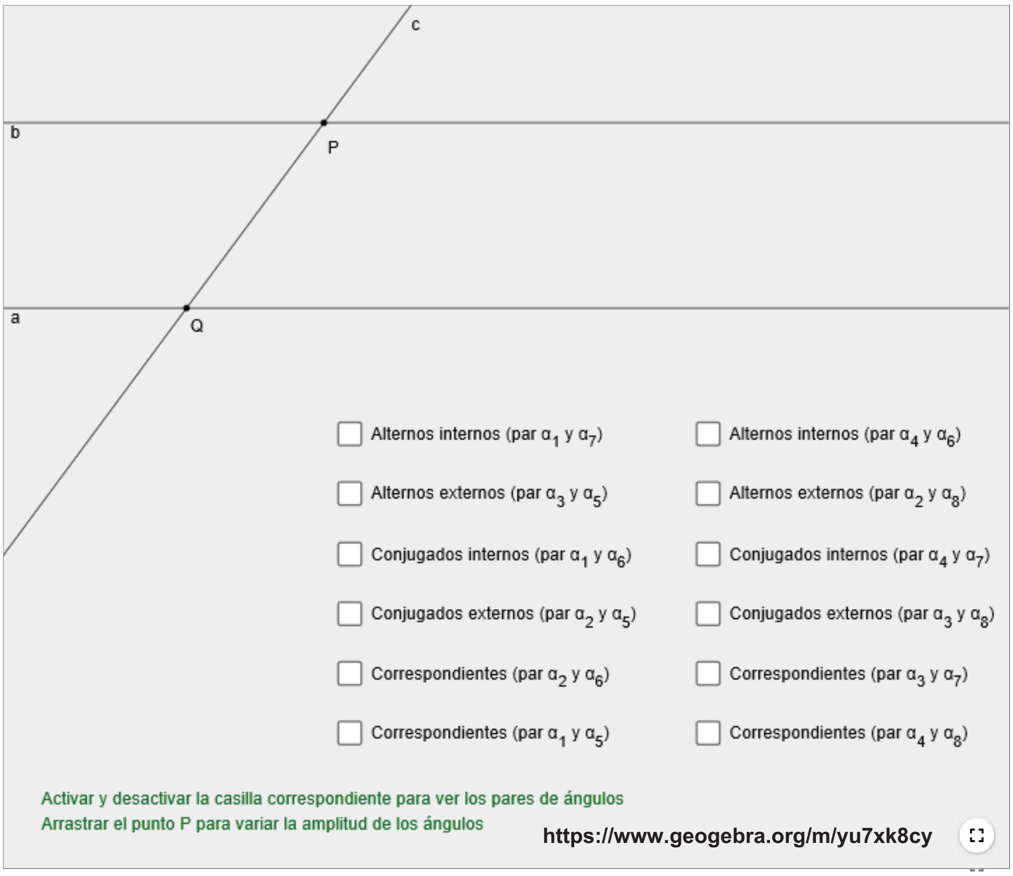
Las rectas a y b son paralelas si y sólo si:

*** Los ángulos correspondientes son congruentes.**

*** Los ángulos alternos son congruentes.**

*** Los ángulos conjugados son suplementarios.**

En el siguiente gráfico interactivo podrás visualizar los distintos pares de ángulos tildando la casilla correspondiente. Además podrás mover el punto P para modificar la amplitud de los ángulos. Presta atención a la amplitud de los ángulos de cada par.



2. Práctica 1

1) Completar la tabla realizando la conversión entre sistemas de medición de ángulos.

Grados sexagesimales		$135°$		$720°$	$450°$		$120°$		$1800°$
Radianes	2π		$\frac{1}{5}\pi$			$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{5}{6}\pi$	

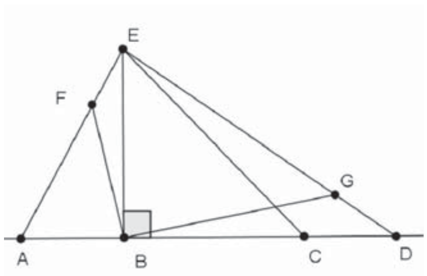
2) En cada caso, determinar la longitud del arco correspondiente a los ángulos centrales de las circunferencias con radio r dado.

a) $\alpha = 27°,\ r = 4\ cm$

b) $\alpha = 25°\ 12',\ r = 8\ cm$

3) Hallar la longitud del arco que recorre el punto A del péndulo cuando barre un ángulo de $20°$.

4) Observar el dibujo y dar ejemplos de lo pedido en cada caso.



a) Un ángulo llano

b) Un ángulo recto

c) Un ángulo agudo

d) Un ángulo obtuso

e) Un par de ángulos complementarios

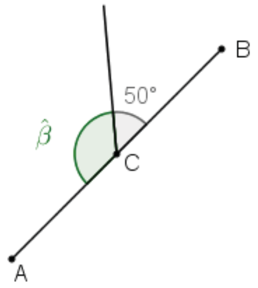
f) Un par de ángulos suplementarios

g) Un par de ángulos consecutivos

h) Un par de ángulos adyacentes

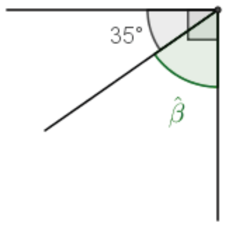
5) En cada caso calcular la medida del ángulo β. Justificar los cálculos.

a)

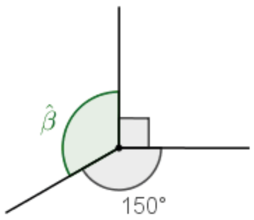


Los puntos A, B y C están alineados.

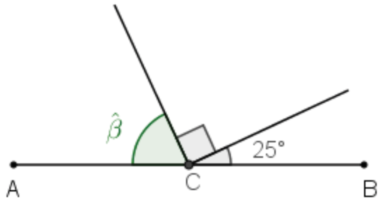
b)



c)



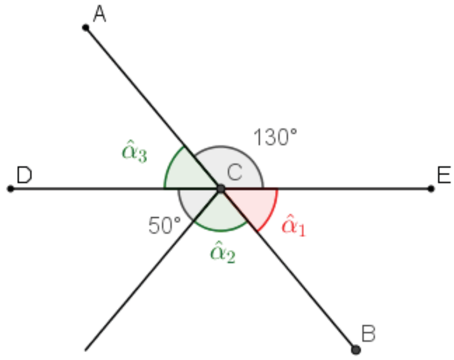
d)



Los puntos A, B y C están alineados.

6) Calcular la amplitud de todos los ángulos desconocidos.

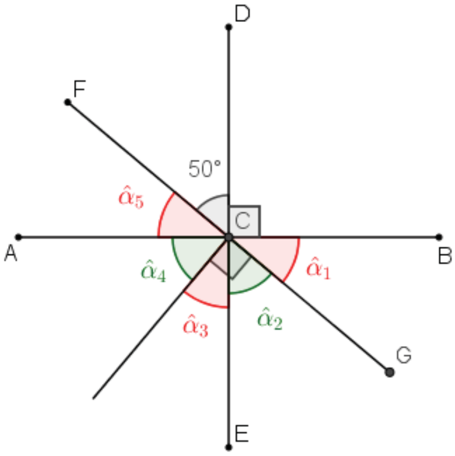
a)



Los puntos A, B y C están alineados.

Los puntos C, D y E están alineados.

b)



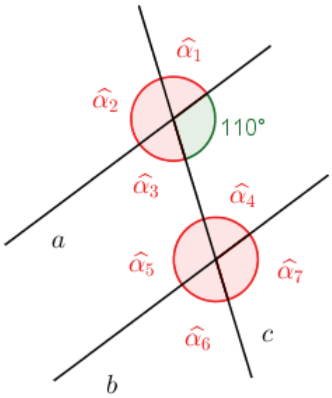
Los puntos A, B y C están alineados.

Los puntos C, D y E están alineados.

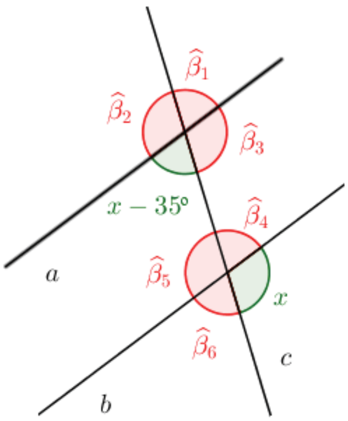
Los puntos C, F y G están alineados.

7) Calcular la medida de todos los ángulos de color rojo sabiendo que $a \parallel b$. Justificar los cálculos.

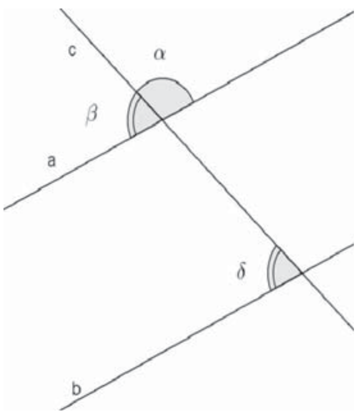
a)



b)

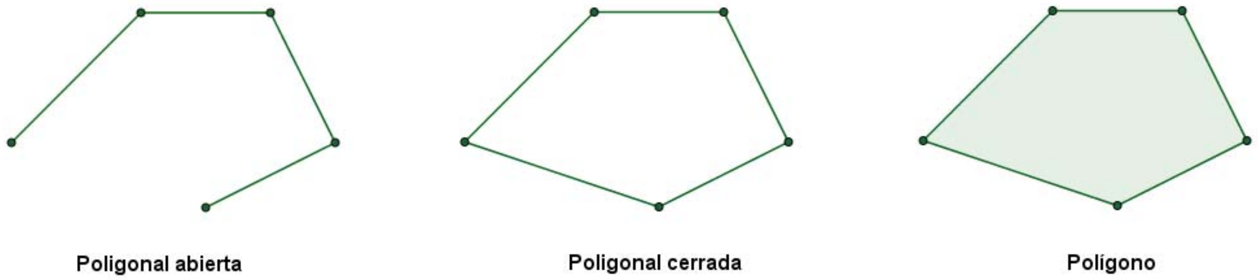


8) Sabiendo que las rectas a y b son paralelas, y que $\alpha = 3x + 15º$ y que $\delta = 4x + 4º$; calcular α, β y δ.



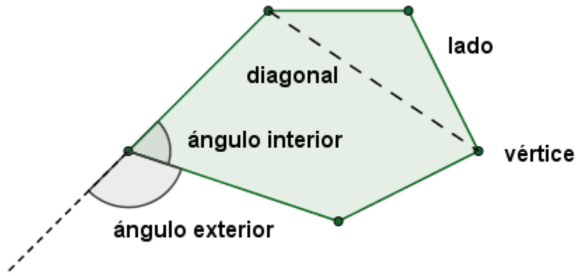
3. Polígonos

Un **polígono** es una región del plano delimitada por una poligonal cerrada (segmentos consecutivos dos a dos de modo que el extremo del primer segmento coincide con el extremo del último segmento)



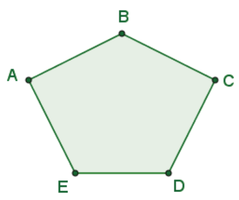
Elementos de un polígono

Lados: son los segmentos que forman la poligonal cerrada que es frontera del polígono.
Vértices: son los puntos extremos de los lados del polígono.
Diagonales: son los segmentos cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del polígono.
Ángulos interiores: son aquellos cuyo vértice es un vértice del polígono y sus lados contienen a dos lados consecutivos del polígono cuyo extremo común es el mencionado vértice.
Ángulos exteriores: cada uno de los ángulos adyacentes a los ángulos interiores del polígono.



Forma de nombrar un polígono

Un polígono se nombra por sus vértices. Por ejemplo, al polígono de la figura lo nombramos polígono $ABCDE$.

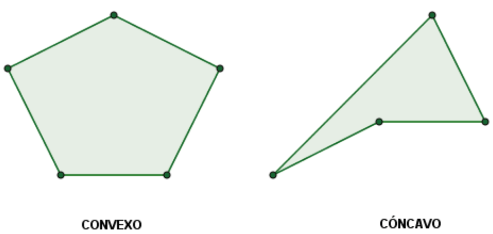


Clasificación

Existen diferentes criterios para clasificar a los polígonos.

Cóncavos y convexos

Los polígonos pueden clasificarse en cóncavos y convexos. Un polígono es **convexo** si todas sus diagonales están dentro del polígono. En caso contrario, es **cóncavo.**



Por cantidad de lados

También se los puede clasificar según la cantidad de lados (que coincide con la cantidad de ángulos y de vértices):

Número de lados	**Nombre del polígono**
3	**Triángulo**
4	**Cuadrilátero**
5	**Pentágono**
6	**Hexágono**
7	**Heptágono**
8	**Octógono**
9	**Eneágono**
10	**Decágono**
11	**Undecágono**
12	**Dodecágono**
13	**Tridecágono**
14	**Tetradecágono**
15	**Pentadecágono**
20	**Icoságono**

Regulares e irregulares

Un polígono **regular** es aquel en el cual todos sus lados tienen la misma longitud y todos sus ángulos interiores tienen la misma amplitud. En caso contrario, es **irregular.**
Se los nombra a los regulares, de acuerdo a la cantidad de lados, como sigue:

Número de lados	**Nombre del polígono**
3	**Triángulo equilátero**
4	**Cuadrado**
5	**Pentágono regular**
6	**Hexágono regular**
7	**Heptágono regular**
8	**Octógono regular**
9	**Eneágono regular**
10	**Decágono regular**
11	**Undecágono regular**
12	**Dodecágono regular**
13	**Tridecágono regular**
14	**Tetradecágono regular**
15	**Pentadecágono regular**
20	**Icoságono regular**

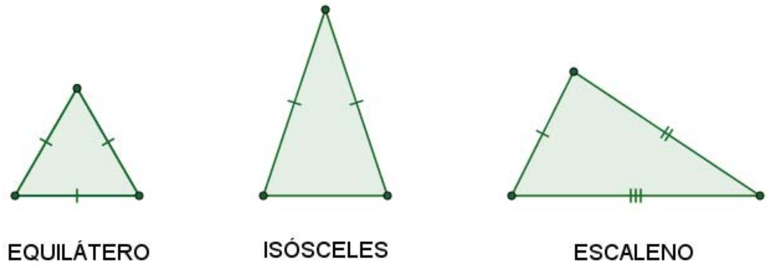
4. Triángulos

Un triángulo es un polígono de tres lados.

4.1. Clasificación de los triángulos

Según sus lados

- **Equiláteros**: sus tres lados son de igual longitud.
- **Isósceles**: al menos dos de sus lados son de igual longitud.
- **Escalenos**: sus tres lados son de distinta longitud.



Nota 1:

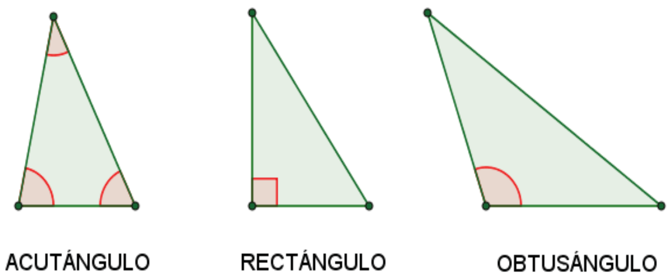
Todo triángulo equilátero es también un triángulo isósceles puesto que, al menos, tiene dos lados de igual longitud.

Nota 2:

En un triángulo isósceles que tiene exactamente dos lados iguales, al lado desigual se lo llama **base**.

Según sus ángulos

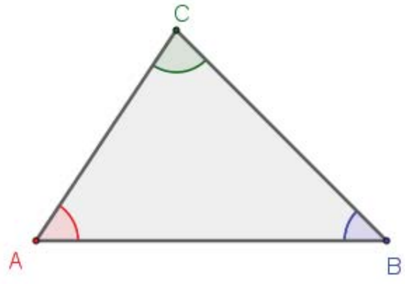
- **Acutángulo**: sus tres ángulos interiores son agudos.
- **Rectángulo**: uno de sus ángulos interiores es recto.
- **Obtusángulo**: uno de sus ángulos interiores es obtuso.



4.2. Propiedades de los triángulos

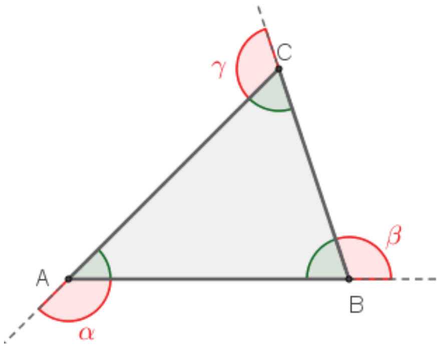
Propiedades

1) La suma de los tres ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.



$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180º$$

2) El amplitud de cualquier ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de la amplitud de los dos ángulos interiores no adyacentes.

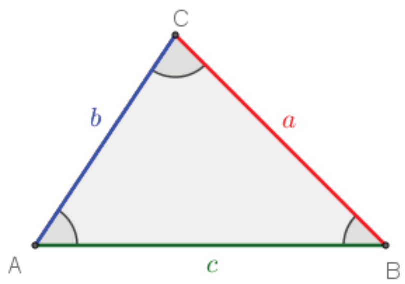


$$\widehat{\alpha} = \widehat{B} + \widehat{C}$$

$$\widehat{\beta} = \widehat{A} + \widehat{C}$$

$$\widehat{\gamma} = \widehat{A} + \widehat{B}$$

3) En todo triángulo, cada lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

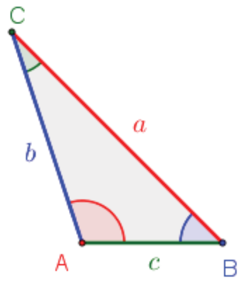


$b + c > a$ y $a > c - b$

$a + c > b$ y $b > c - a$

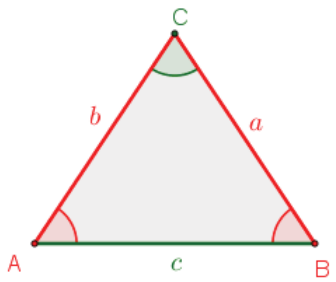
$a + b > c$ y $c > a - b$

4) En todo triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.



$a > b > c \Leftrightarrow \widehat{A} > \widehat{B} > \widehat{C}$

5) En todo triángulo a lados de igual longitud se oponen ángulos de igual amplitud.



$\widehat{A} = \widehat{B} \Leftrightarrow a = b$

4.3. Elementos notables

En todo triángulo, además de sus vértices y lados, existen otros puntos y rectas "notables"

Mediatrices y circuncentro

Una **mediatriz** de un triángulo es una recta perpendicular a uno de sus lados que pasa por el punto medio del mismo. Los puntos de la mediatriz de un lado equidistan (están a igual distancia) de los extremos de dicho lado. Todo triángulo tiene tres mediatrices, una por cada lado. En cualquier triángulo, las tres mediatrices se intersecan en un punto llamado **circuncentro** que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.

Bisectrices e incentro

Una **bisectriz** de un triángulo es una recta que divide a uno de sus ángulos interiores en dos ángulos de igual medida. Los puntos de la bisectriz equidistan (están a igual distancia) de los lados del ángulo. Todo triángulo tiene tres bisectrices, una por cada ángulo interior. En cualquier triángulo, las tres bisectrices se intersecan en un punto llamado **incentro** que es el centro de la circunferencia inscripta en el triángulo.

Medianas y baricentro

Una **mediana** de un triángulo es un segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto. Todo triángulo tiene tres medianas, una por cada lado. En cualquier triángulo, las tres medianas se intersecan en un punto llamado **baricentro**. El baricentro divide a cada una de las medianas en relación 1:2.

Alturas y ortocentro

Una **altura** de un triángulo es un segmento perpendicular a un lado (o su prolongación) trazado desde el vértice opuesto a dicho lado. Todo triángulo tiene tres alturas, una correspondiente a cada lado. En cualquier triángulo, las tres alturas se intersecan en un punto llamado **ortocentro**.

En la siguiente actividad interactiva podrás visualizar las rectas y puntos notables del triángulo tildando el casillero correspondiente. Además deslizando "mover$_C$" podés cambiar el tipo de triángulo eligiendo entre acutángulo, rectángulo u obtusángulo.

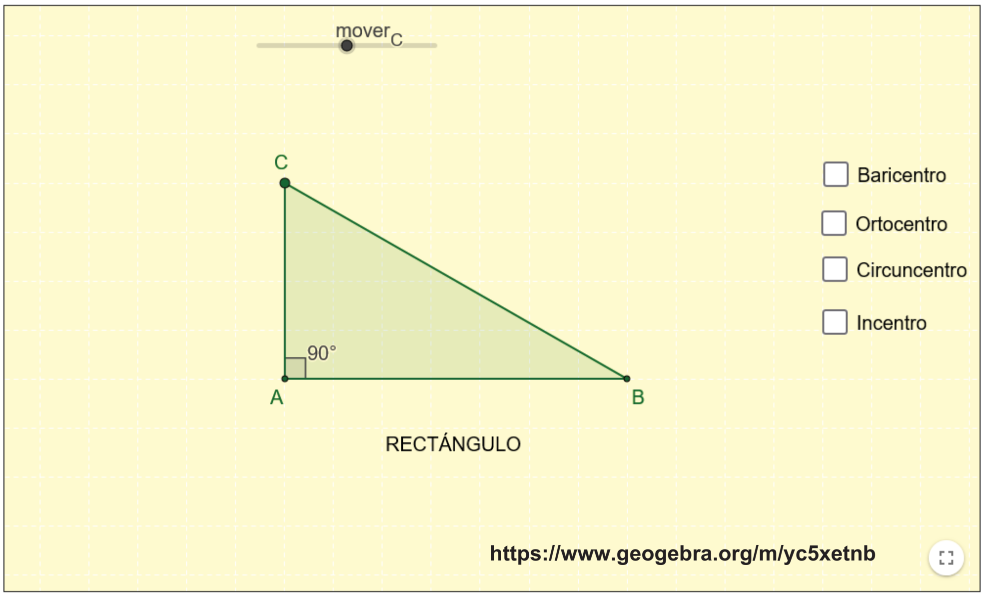
Para cualquier tipo de triángulo:

¿El baricentro siempre esta en el interior del triángulo?

¿El ortocentro siempre esta en el interior del triángulo?

¿El circuncentro siempre esta en el interior del triángulo?

¿El incentro siempre esta en el interior del triángulo?



Nota:

- En un triángulo isósceles la mediana correspondiente a la base es también altura y está contenida en la mediatriz correspondiente a la base y en la bisectriz del ángulo opuesto.

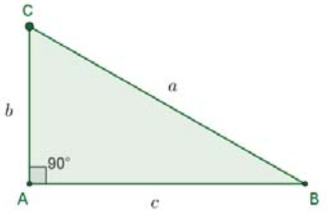
- En un triángulo equilátero, la mediana correspondiente a cada lado es también altura y está contenida en la mediatriz correspondiente al mismo lado y en la bisectriz del ángulo opuesto.

4.4. Teorema de Pitágoras

Teorema de Pitágoras

Un triángulo es rectángulo si, y sólo si, se: cumple que el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus catetos.

En símbolos:
Si ABC es un triángulo rectángulo en $\hat{A}$ y llamamos b y c a las longitudes de sus catetos y a a la longitud de su hipotenusa:

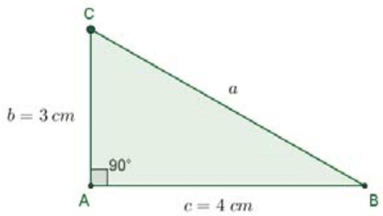


Resulta:

$$ABC \; es \; triángulo \; rectángulo \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

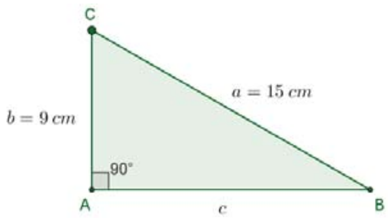
Ejemplos

a) Calcular la longitud de la hipotenusa del triángulo de la figura:



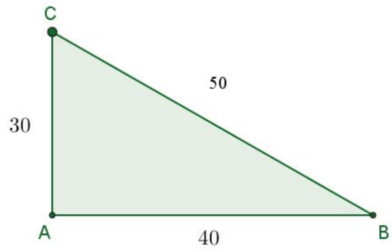
Por teorema de Pitágoras, como ABC es triángulo rectángulo en $\hat{A}$, resulta $a^2 = b^2 + c^2$
$a^2 = (3\ cm)^2 + (4\ cm)^2$
$a^2 = 9\ cm^2 + 16\ cm^2$
$a^2 = 25\ cm^2$
$a = \sqrt{25\ cm^2}\ \ (a > 0)$ por ser una longitud
$a = 5\ cm$

b) Calcular la longitud del cateto del triángulo de la figura:



Por teorema de Pitágoras, como ABC es triángulo rectángulo en $\hat{A}$, resulta $a^2 = b^2 + c^2$
$(15\ cm)^2 = (9\ cm)^2 + c^2$
$225\ cm^2 = 81\ cm^2 + c^2$
$225\ cm^2 - 81\ cm^2 = c^2$
$144\ cm^2 = c^2$
$\sqrt{144\ cm^2} = c\ \ (c > 0)$ por ser una longitud
$c = 12\ cm$

c) Determinar si el triángulo de la figura es o no un triángulo rectángulo:



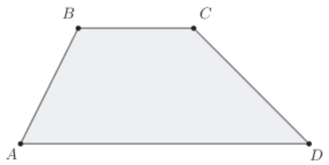
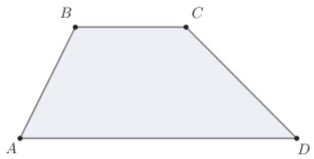
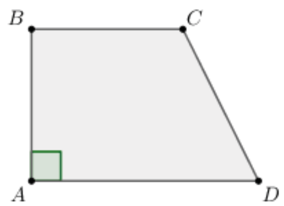
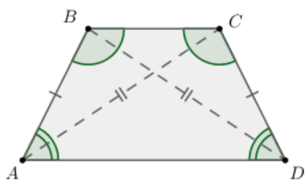
Por teorema de Pitágoras, si ABC es triángulo rectángulo, debe cumplirse que la suma de los cuadrados de las medidas de los lados de menor longitud sea igual al cuadrado de la medida del lado de mayor longitud. O sea, nos preguntamos,
¿$30^2 + 40^2 = 50^2$?
$30^2 + 40^2 = 900 + 1600 = 2500 = 50^2 \ \rightarrow \ 30^2 + 40^2 = 50^2$, resulta ABC triángulo rectángulo en $\hat{A}$.

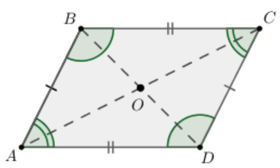
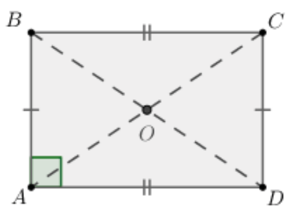
d) Se llama **terna pitagórica** a cualquier conjunto de tres números naturales a, b, c para los cuales se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Determinar si los números $6, 8, 11$ constituyen una terna pitagórica.
Nos preguntamos, ¿$6^2 + 8^2 = 11^2$?
$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \neq 11^2$, por lo tanto, $6, 8, 11$ no constituyen una terna pitagórica.

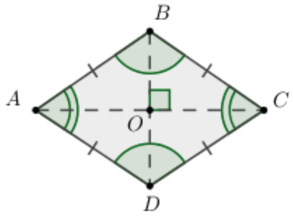
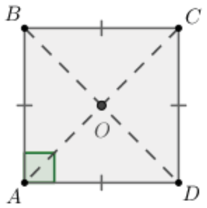
5. Cuadriláteros

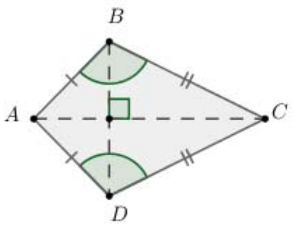
Un cuadrilátero es un polígono de cuatro lados.

Dentro del conjunto de los cuadriláteros convexos distinguimos a: los **trapecios**, los **paralelogramos** y los **romboides**.

<table>
<tr><th>Cuadrilátero</th><th>Tipo</th><th>Propiedades</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Trapecios
Son cuadriláteros que poseen un par de lados opuestos paralelos. Dichos lados reciben el nombre de bases.
</td><td>Trapecio Escaleno
Los lados no paralelos no son congruentes.
</td><td></td></tr>
<tr><td>Trapecio Rectángulo
Uno de los lados no paralelos es perpendicular a las bases.
</td><td></td></tr>
<tr><td>Trapecio isósceles
Tiene el par de lados opuestos no paralelos congruentes.
</td><td>Un trapecio es isósceles si y sólo si los ángulos de la base son congruentes.
Las diagonales son congruentes.</td></tr>
</table>

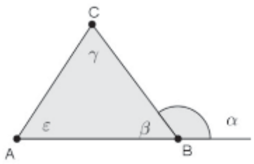
<table>
<tr><th>Cuadrilátero</th><th>Tipo</th><th>Propiedades</th></tr>
<tr><td>Paralelogramos
Son cuadriláteros que poseen sus lados opuestos paralelos.
</td><td>Rectángulos
Es un paralelogramo con un ángulo recto.
</td><td>Un paralelogramo, es rectángulo si y sólo si sus diagonales son congruentes.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Cuadrilátero</th><th>Tipo</th><th>Propiedades</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Propiedades:
• Un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo si los lados opuestos son congruentes.
• Un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo si las diagonales se bisecan.
• Un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo si los ángulos opuestos son congruentes.
• Un cuadrilátero es paralelogramo si y sólo si posee un par de lados opuestos congruentes y paralelos.</td>
<td>Rombo
Es un paralelogramo con con dos lados consecutivos congruentes.
</td>
<td>• Un paralelogramo, es un rombo si y sólo si las diagonales son perpendiculares.
• Un paralelogramo, es un rombo si y sólo si las diagonales son bisectrices de los ángulos opuestos.</td></tr>
<tr><td>Cuadrado
Es un paralelogramo con un ángulo recto y dos lados consecutivos congruentes.
</td>
<td>• Un paralelogramo, es cuadrado si y sólo si sus diagonales son congruentes y perpendiculares.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Cuadrilátero</th><th>Propiedades</th></tr>
<tr><td>Romboides
Son cuadriláteros, no paralelogramos, que poseen dos pares de lados consecutivos congruentes.
</td>
<td>• En un romboide, los ángulos interiores determinados por los lados no congruentes, son congruentes.
• En un romboide, las diagonales son perpendiculares.</td></tr>
</table>

6. Práctica 2

1) Calcular las medidas de los ángulos α, β, γ y ϵ sabiendo que:



a) $\begin{cases} \alpha = 6x + 26º \\ \beta = 2x + 10º \\ \gamma = 5x - 17º \end{cases}$

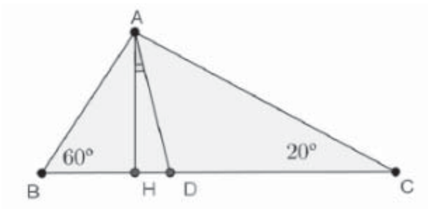
b) $\begin{cases} \alpha = 4x - 17º30' \\ \gamma = x + 26º30' \\ \epsilon = 2x - 12º \end{cases}$

2) α, β, γ son los ángulos internos de un triángulo. El ángulo β mide cuatro veces lo que mide α; y γ mide cinco veces el doble de α .¿Cuánto miden los tres ángulos?

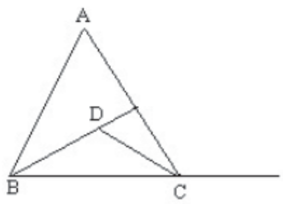
3) ¿Cuál es el valor de un ángulo de la base en un triángulo isósceles, si el ángulo del vértice que forman los lados congruentes es de $35º24'$?

4) El ángulo del vértice que forman los lados congruentes de un triángulo isósceles mide $42º28'$.¿Cuánto mide el ángulo exterior formado por uno de los lados iguales y la prolongación de la base?

5) En un triángulo ABC, el ángulo $\widehat{B}$ mide $60º$ y el ángulo $\widehat{C}$ mide $20º$. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman la altura y la bisectriz trazada desde el vértice A?



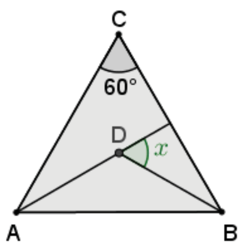
6) Dado el ángulo $\widehat{A} = 82º$ del triángulo ABC, averiguar el ángulo $B\widehat{D}C$ formado por las bisectrices interiores de los otros dos.



7) En un triángulo rectángulo el ángulo $\widehat{B}$ mide $32º$. ¿Cuál es la amplitud del ángulo $A\hat{I}C$, determinado por la intersección de las bisectrices de los ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{C}$?

8) En cada caso, calcular el valor de x.

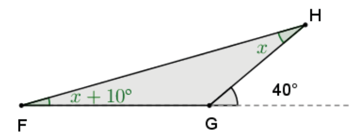
a)



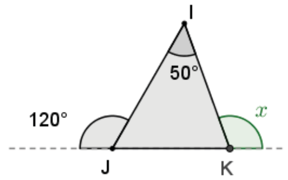
$\overrightarrow{AD}$ **bisectriz de** $\widehat{A}$

$\overrightarrow{BD}$ **bisectriz de** $\widehat{B}$

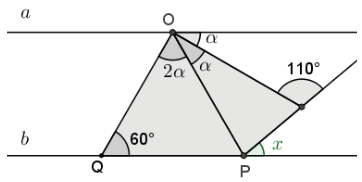
b)



c)

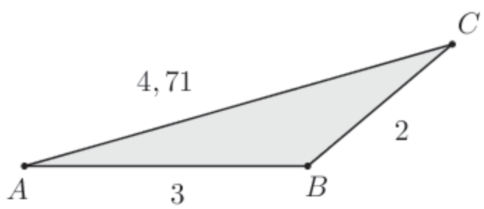


d)

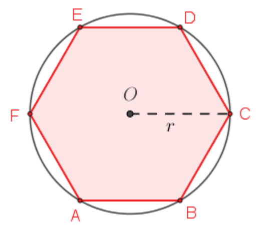


$a \parallel b$

9) Las amplitudes de los ángulos interiores del triángulo ABC son las siguientes: $15º\ 50'\ 24''$, $24º\ 9'\ 36''$ y $140º$**.** Asociar cada medida con el ángulo correspondiente.



10) Explicar por qué la medida del lado de un hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscripta.



11) Dibujar un cuadrilátero y trazar todas las diagonales desde uno de sus vértices.

a) ¿En cuántos triángulos quedó dividido cuadrilátero?

b) Recordando que la suma de los ángulos de un triángulo es $180º$, ¿cuál es la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero?

c) Completar la siguiente tabla aplicando, en cada caso, el razonamiento anterior:

Polígono convexo	**Cantidad de lados**	**Cantidad de triángulos**	**Suma de los ángulos interiores**
Triángulo	3	1	$1 \cdot 180º = 180º$
Cuadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octógono			
Polígono convexo de n lados			

d) Completar la siguiente afirmación:

"La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados es: $S_n = ...$"

12) Un trapecio isósceles tiene un ángulo de 60º. ¿Cuánto miden los demás ángulos interiores?

13) Un pentágono es tal que dos de sus ángulos interiores miden 75º y 110º y los restantes ángulos interiores son congruentes entre sí. ¿Cuál es la amplitud de cada uno de los ángulos congruentes?

14) Completar con: SIEMPRE, A VECES, NUNCA según corresponda:

a) Un rombo______________ es un cuadrado.

b) Un cuadrado____________ es un rectángulo.

c) Un romboide____________ es un paralelogramo.

d) Los trapecios____________ tienen un par de lados paralelos.

e) Las diagonales de un paralelogramo_____________ se bisecan.

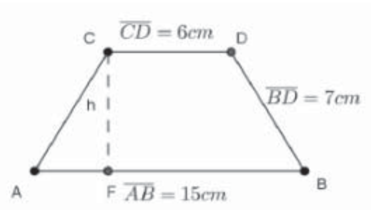
f) Las diagonales de un trapecio____________ son congruentes.

g) La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero___________ es 360º.

h) Un cuadrado______________ es un rombo.

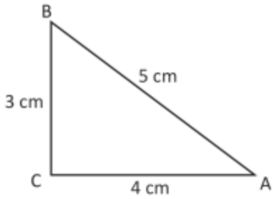
i) Un romboide______________ tiene un par de ángulos opuestos iguales.

15) Calcular la altura del trapecio isósceles de la figura.



16) Si las medidas de los tres lados de un triángulo son 8, 15 y 17, determinar si es o no un triángulo rectángulo.

17) Mostrar que en el triángulo ABC de la figura, la medida del $A\hat{C}B$ es 90°.



18) Verificar cuáles de los triángulos son rectángulos, si los datos proporcionados representan las medidas de sus lados.

a) $2\ cm$, $2\ cm$ y $3\ cm$

b) $4\ m$, $5\ m$ y $\sqrt{41}\ m$

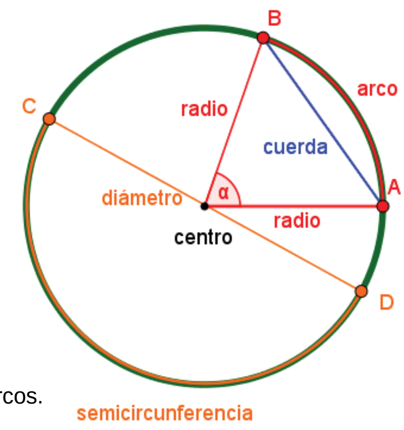
c) $7, 24, 25$

d) $2, 3, 4$

7. Circunferencia y círculo

Circunferencia

Curva formada por todos los puntos del plano equidistan de otro punto llamado centro.



Elementos de una circunferencia:

Arco: porción de la circunferencia comprendida entre dos de sus puntos.

Centro: punto desde el que se sitúan a igual distancia todos los puntos de la circunferencia.

Radio: segmento con extremos en el centro de la circunferencia y en cualquier punto de esta.

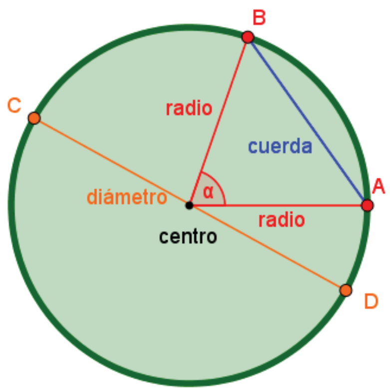
Cuerda: Segmento que une dos puntos de una circunferencia. Divide a la circunferencia en dos arcos.

Diámetro: cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Su medida sería dos veces la del radio. El diámetro divide la circunferencia en dos arcos de igual longitud llamados semicircunferencias.

Ángulo central: es un ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia y sus lados son dos radios.

Círculo

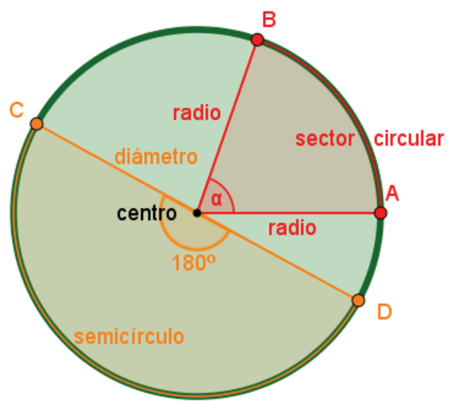
Porción del plano delimitada por una circunferencia.



Sector circular

Cualquier porción del círculo determinada por un ángulo central se denomina **sector circular**.

Un sector circular determinado por un ángulo central llano se llama **semicírculo**.



8. Medidas de figuras planas: perímetro y área

El **perímetro** de una figura plana es la medida de la longitud de su contorno (frontera o borde).

El **área** de una figura plana es la medida de su superficie, o sea, de la porción de plano ocupada por la figura.

En ambos casos, se trata de medir una magnitud. El proceso de medición consiste en comparar la magnitud a medir con alguna unidad de medición. Para facilitar el intercambio de datos de mediciones las unidades son patrones que se establecen por convención.

Argentina se encuentra dentro del **Sistema Internacional de Unidades** (SI) que adopta el sistema métrico decimal. Este sistema, actualmente, está formado por dos tipos de unidades: las **fundamentales** y las **derivadas**.

Para medir longitudes se utiliza el **metro**, una unidad de medida fundamental cuyo símbolo es m.

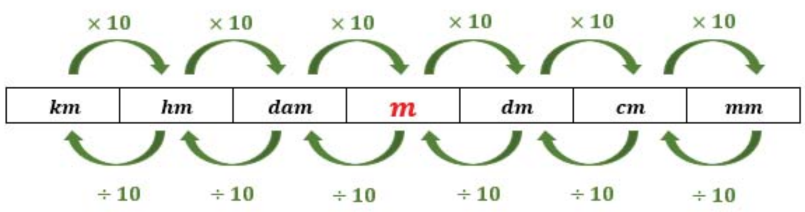
Para medir superficies se utiliza el **metro cuadrado**, una unidad de medida derivada del metro cuyo símbolo es m^2. Un metro cuadrado es la medida de la superficie de un cuadrado de un metro de lado.

Estas, como todas las unidades de medida, tiene múltiplos (x10^1, x10^2, x10^3, etc.) y submúltiplos (x10^{-1}, x10^{-2}, x10^{-3}, etc.). Cada factor tiene un nombre asociado, un prefijo que se antepone a la unidad de medida. Algunos ejemplos:

Factor	**Prefijo**	**Símbolo**
10^{-3}	$mili$	m
10^{-2}	$centi$	c
10^{-1}	$deci$	d
10^{1}	$deca$	da
10^{2}	$hecto$	h
10^{3}	$kilo$	k

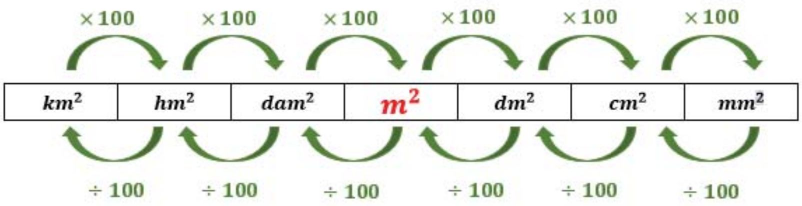
Así los múltiplos y submúltiplos del metro son:

$1\ kilómetro$	$1\ km$	$10^3\ m = 1000\ m$
$1\ hectómetro$	$1\ hm$	$10^2\ m = 100\ m$
$1\ decámetro$	$1\ dam$	$10^1\ m = 10\ m$
$1\ metro$	$1\ m$	$1\ m$
$1\ decímetro$	$1\ dm$	$10^{-1}\ m = 0,1\ m$
$1\ centímetro$	$1\ cm$	$10^{-2}\ m = 0,01\ m$
$1\ milímetro$	$1\ mm$	$10^{-3}\ m = 0,001\ m$



Los múltiplos y submúltiplos del metro cuadrado son:

$1\ kilómetro\ cuadrado$	$1\ km^2$	$1.000.000\ m^2$
$1\ hectómetro\ cuadrado$	$1\ hm^2$	$10.000\ m^2$
$1\ decámetro\ cuadrado$	$1\ dam^2$	$100\ m^2$
$1\ metro\ cuadrado$	$1\ m^2$	$1\ m^2$
$1\ decímetro\ cuadrado$	$1\ dm^2$	$0,01\ m^2$
$1\ centímetro\ cuadrado$	$1\ cm^2$	$0,0001\ m^2$
$1\ milímetro\ cuadrado$	$1\ mm^2$	$0,000001\ m^2$



Fórmulas de perímetro y de área de algunas figuras planas

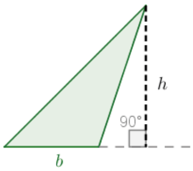
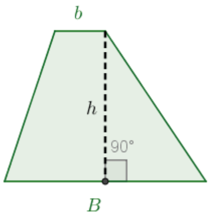
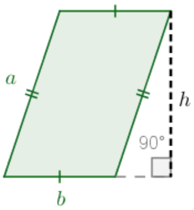
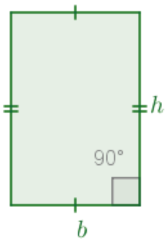
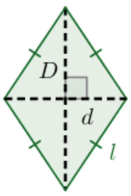
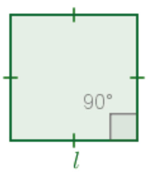
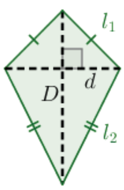
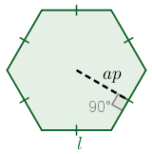
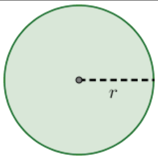
Figura	Nombre	Perímetro (P)	Área (A)
	Triángulo	Sumar longitudes de los lados	$A=\frac{1}{2}\cdot b\cdot h$
	Trapecio	Sumar longitudes de los lados	$A=\frac{1}{2}\cdot (B+b)\cdot h$
	Paralelogramo	$P=2(a+b)$	$A=b\cdot h$
	Rectángulo	$P=2(b+h)$	$A=b\cdot h$
	Rombo	$P=4\cdot l$	$A=\frac{1}{2}\cdot D\cdot d$
	Cuadrado	$P=4\cdot l$	$A=l^2$
	Romboide	$P=2(l_1+l_2)$	$A=\frac{1}{2}\cdot D\cdot d$

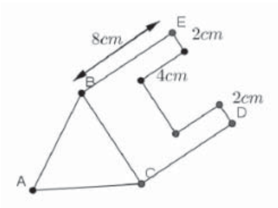
Figura	Nombre	Perímetro (P)	Área (A)
	Polígono regular (n lados)	$P = n \cdot l$	$A = \frac{1}{2} \cdot n \cdot l \cdot ap$
	Círculo	$P = 2 \cdot \pi r$	$A = \pi \cdot r^2$

9. Práctica 3

1) Realizar la conversión de unidades indicada en cada caso:

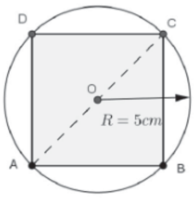
Unidades de longitud	**Unidades de área**
$9\ km = \ldots\ldots m$	$9\ km^2 = \ldots\ldots m^2$
$5\ cm = \ldots\ldots mm$	$5\ cm^2 = \ldots\ldots mm^2$
$5000\ m = \ldots\ldots dam$	$50\ cm^2 = \ldots\ldots mm^2$
$40\ mm = \ldots\ldots cm$	$5000\ m^2 = \ldots\ldots dam^2$
$900\ cm = \ldots\ldots m$	$40\ mm^2 = \ldots\ldots cm^2$
$5,36\ m = \ldots\ldots cm$	$900\ cm^2 = \ldots\ldots m^2$
$15,9\ cm = \ldots\ldots mm$	$5,36\ m^2 = \ldots\ldots cm^2$
$7497\ m = \ldots\ldots hm$	$15,9\ cm^2 = \ldots\ldots mm^2$
$1,638\ km = \ldots\ldots dam$	$7497\ m^2 = \ldots\ldots hm^2$
$26,2\ cm = \ldots\ldots m$	$1,638\ km^2 = \ldots\ldots dam^2$
$7,63\ dm = \ldots\ldots mm$	$26,2\ cm^2 = \ldots\ldots m^2$
$2,39\ km = \ldots\ldots dm$	$7,63\ dm^2 = \ldots\ldots mm^2$
	$2,39\ km^2 = \ldots\ldots dm^2$

2) Calcular el perímetro y el área de la figura, sabiendo que el triángulo ABC es equilátero y $BEDC$ es un cuadrado.



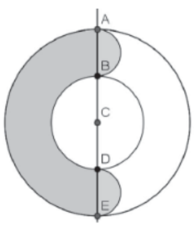
3) Calcular el perímetro de un triángulo isósceles sabiendo que la base es de $12\ cm$ y la altura correspondiente a la base es de $8\ cm$.

4) El cuadrado $ABCD$ está inscripto en la circunferencia de centro O y radio $R = 5\ cm$. ¿Cuál es el perímetro de $ABCD$?



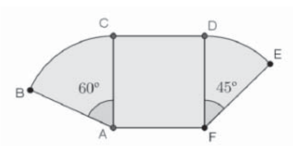
5) En cada caso, calcular el perímetro de las zona sombreada.

a)



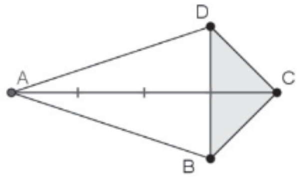
Los arcos AB, BD, DE y AE son semicircunferencias
$AB = BC = CD = DE$
C: centro de la circunferencia
$AD = 24\ cm$

b)



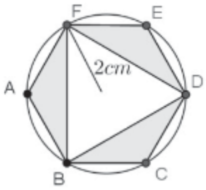
$ACDF$ cuadrado
$DF = 8\ cm$
BC sector circular con centro en A
DE sector circular con centro F

6) En cada caso, calcular el área de las zona sombreada.

a) 

$ABCD$ romboide

$AC = 21\ cm, OC = \dfrac{2}{5}AC$, $DB = 10,5\ cm$

b) 

$ABCDEF$ es un hexágono regular.

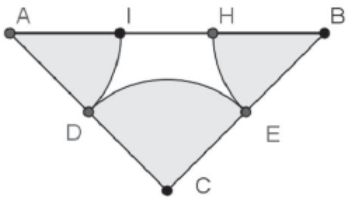
Recordar: el lado del hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscripta.

7) Calcular la base de un rectángulo de área $50\ m^2$ y cuya altura es $4\ m$.

8) ¿Cuánto mide el lado y el área de un cuadrado si la diagonal mide $8\ cm$?

9) Sabiendo que un cuadrado tiene por lado $3\ cm$, ¿cuál es el perímetro de un triángulo equilátero de igual área que el cuadrado?

10) Calcular el área de la zona sombreada.



El triángulo ABC es isósceles con base AB.

$AC = 10\ cm$

D y E son puntos medios de los lados AC y BC respectivamente.

HE, DE y DI son arcos de circunferencia con centro B, C y A respectivamente.

10. Cuerpos geométricos

Definición

Un **cuerpo** o **sólido** es una región cerrada del espacio tridimensional.

Clasificación de cuerpos geométricos

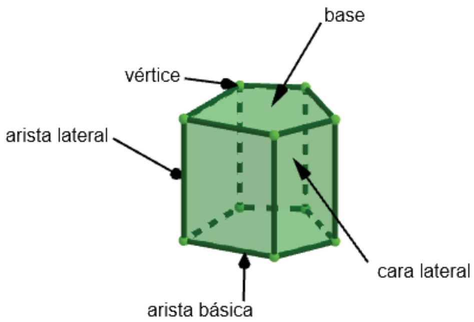
Se pueden clasificar en:

- **Poliedros**: son regiones finitas del espacio limitada exclusivamente por polígonos.
- **Redondos**: son regiones finitas del espacio limitadas por, al menos, una superficie curva.

Poliedros

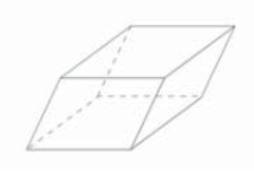
Los cuerpos poliedros más sencillos, aunque existen otros, son:

- **Prismas:** es un poliedro que consta de dos caras, llamadas bases, que son polígonos congruentes contenidos en planos paralelos. Las caras restantes, llamadas caras laterales, son paralelogramos. La **altura** de un prisma es la distancia entre las bases (es decir, es la longitud de cualquier segmento con extremos en los planos que contienen a las bases y que es perpendicular a los mismos).

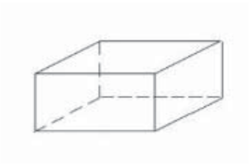


Nota:

Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos. Un paralelepípedo en el cual sus caras son rectángulos es un paralelepípedo recto.

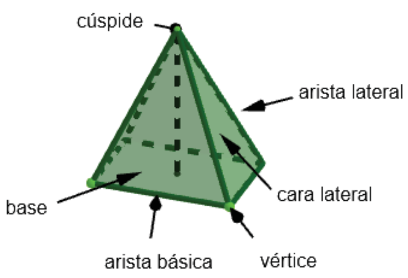


paralelepípedo



paralelepípedo recto

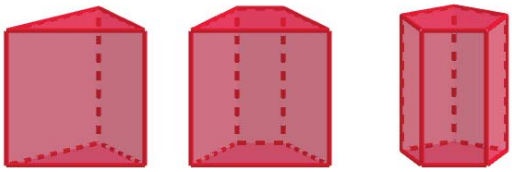
- **Pirámides**: son poliedros cuya base es un polígono cualquiera y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común, que es el vértice o cúspide de la pirámide. La **altura** de una pirámide es la distancia de la cúspide a la base (es decir, es la longitud del segmento perpendicular a la base con extremo en la cúspide).



Prismas

Se los nombra de acuerdo al polígono de la base.

Ejemplos:



Prisma triangular   Prisma cuadrangular   Prisma pentagonal

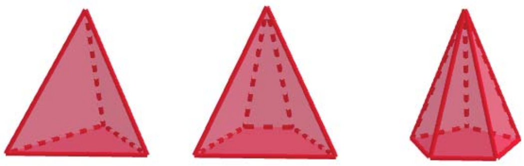
Clasificación:

Existen un enorme variedad de prismas; en este curso trabajaremos mayormente con **prismas rectos**.
Un prisma es recto si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. En los prismas rectos la altura coincide con la longitud de las aristas laterales.

Pirámides

Se las nombra de acuerdo al polígono de la base.

Ejemplos:



Pirámide triangular   Pirámide cuadrangular   Pirámide pentagonal

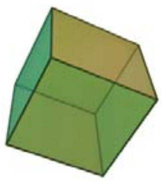
Clasificación:

Existen un enorme variedad de pirámides; en este curso trabajaremos con **pirámides rectas**.
Una pirámide es recta si su base es un polígono regular y el vértice de la pirámide (cúspide) equidista de los vértices de la base. Sus caras laterales son triángulos isósceles congruentes cuya altura es la apotema de la pirámide.

Poliedros regulares o sólidos platónicos

Un poliedro regular es un poliedro limitado por polígonos regulares, todos congruentes entre sí, y tales que en cada vértice concurre la misma cantidad de aristas.Sólo hay cinco poliedros regulares. Estos son: tetraedro, cubo o hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

El siguiente cuadro resume las características principales de cada uno de ellos.

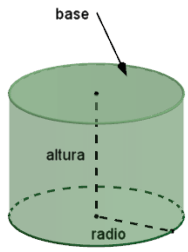
Nombre	Poliedro regular	Cantidad de caras	Polígono de la cara
Tetraedro		4	Triángulo equilátero
Cubo		6	Cuadrado
Octaedro		8	Triángulo equilátero

Nombre	Poliedro regular	Cantidad de caras	Polígono de la cara
Dodecaedro		12	Pentágono regular
Icosaedro		20	Triángulo equilátero

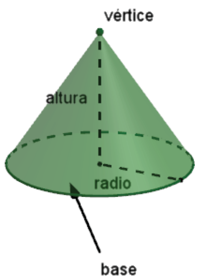
Redondos

Los cuerpos redondos más sencillos, aunque existen otros, son:

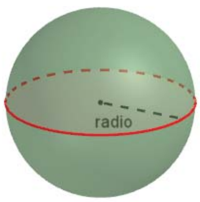
- **Cilindros:** son sólidos limitados por tres superficies: dos planas, denominadas bases, que son círculos congruentes contenidos en planos paralelos y una superficie curva, conocida como superficie lateral que "conecta" ambas bases. La **altura** de un cilindro es la distancia entre las bases (es decir, es la longitud de cualquier segmento con extremos en los planos que contienen a las bases y que es perpendicular a los mismos). Trabajaremos con **cilindros rectos** en los cuales el segmento que tiene por extremos los centros de las bases es perpendicular a las mismas.



- **Conos:** son sólidos limitados por dos superficies: un círculo, denominado base y una superficie curva, conocida como superficie lateral que "conecta" la base con un punto exterior al plano que la contiene. La **altura** de un cono es la distancia entre el vértice y la base. Trabajaremos con **conos rectos** en los cuales el segmento que tiene por extremos el vértice y el centro de la base es perpendicular a la misma.



- **Esferas:** son sólidos limitados por una superficie formada por todos los puntos del espacio tales que la distancia (llamada radio) a un punto determinado, denominado centro, es siempre la misma.



10.1. Medidas de cuerpos: área y volumen

ÁREA Y VOLUMEN DE CUERPOS GEOMÉTRICOS

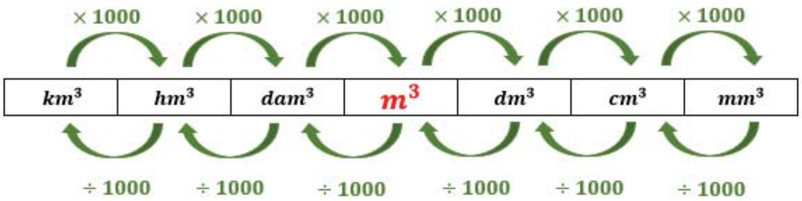
El **área lateral** de un cuerpo es la medida de la superficie lateral del mismo, sin incluir la de la o las bases y **área total** es la suma entre el área lateral y el área de su o sus bases.

El **volumen** de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa.

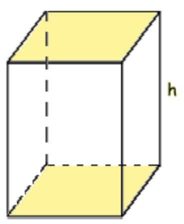
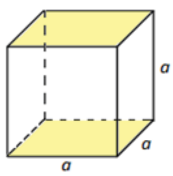
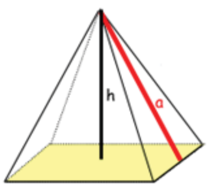
Para medir volúmenes se utiliza el metro cúbico, una unidad de medida derivada del metro cuyo símbolo es m^3. Un metro cúbico es la medida del volumen de un cubo de un metro de lado.

Los múltiplos y submúltiplos del metro cúbico son:

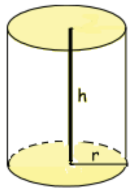
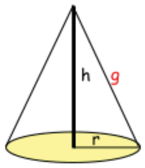
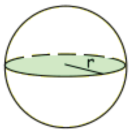
$1\ kilómetro\ cúbico$	$1\ km^3$	$1.000.000.000\ m^3$
$1\ hectómetro\ cúbico$	$1\ hm^3$	$1.000.000\ m^3$
$1\ decámetro\ cúbico$	$1\ dam^3$	$1000\ m^3$
$1\ metro\ cúbico$	$1\ m^3$	$1\ m^3$
$1\ decímetro\ cúbico$	$1\ dm^3$	$0,001\ m^3$
$1\ centímetro\ cúbico$	$1\ cm^3$	$0,000001\ m^3$
$1\ milímetro\ cúbico$	$1\ mm^3$	$0,000000001\ m^3$



Fórmulas de área y de volumen de algunos cuerpos poliedros

CUERPO	ÁREA		VOLUMEN
	ÁREA LATERAL (A_l)	ÁREA TOTAL ($A_l + A_{bases}$)	
Prisma recto 	$A_l = perímetro\ de\ la\ base \cdot h$ $h = altura\ del\ prisma$	$A_l + 2 \cdot área\ de\ la\ base$ El prisma tiene 2 bases	$área\ de\ la\ base \cdot h$
Cubo 	$4 \cdot a^2$	$A_l + 2 \cdot a^2 = 6 \cdot a^2$	a^3
Pirámide recta 	$A_l = \frac{perímetro\ de\ la\ base \cdot a}{2}$ $a = altura\ de\ la\ cara\ lateral$	$A_l + área\ de\ la\ base$	$\frac{área\ de\ la\ base \cdot h}{3}$ $h = altura\ de\ la\ pirámide$

Fórmulas de área y de volumen de algunos cuerpos redondos

CUERPO	ÁREA		VOLUMEN
	ÁREA LATERAL (A_l)	ÁREA TOTAL $(A_l + A_{bases})$	
Cilindro recto 	$A_l = 2\cdot\pi\cdot r\cdot h$	$\underbrace{2\cdot\pi\cdot r\cdot h}_{A_l} + 2\cdot\underbrace{\pi\cdot r^2}_{A_{base}}$ El cilindro tiene 2 bases	$\pi\cdot r^2\cdot h$
Cono recto 	$A_l = \pi\cdot r\cdot g$	$\underbrace{\pi\cdot r\cdot g}_{A_l} + \underbrace{\pi\cdot r^2}_{A_{base}}$	$\dfrac{\pi\cdot r^2\cdot h}{3}$
Esfera 	$A_l = 4\cdot\pi\cdot r^2$		$\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$

Nota:

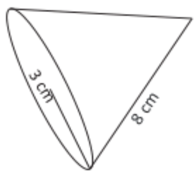
La capacidad es la medida del volumen que puede contener un cuerpo. La unidad de medida es el litro. Un litro equivale a $1000\ cm^3$

11. Práctica 4

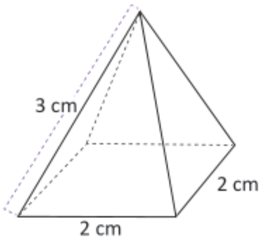
1) Realizar la conversión de unidades indicada en cada caso:

Unidades de volumen
$9\ km^3 = \ldots\ldots m^3$
$5\ cm^3 = \ldots\ldots mm^3$
$50\ cm^3 = \ldots\ldots mm^3$
$5000\ m^3 = \ldots\ldots dam^3$
$40\ mm^3 = \ldots\ldots cm^3$
$900\ cm^3 = \ldots\ldots m^3$
$5,36\ m^3 = \ldots\ldots cm^3$
$15,9\ cm^3 = \ldots\ldots mm^3$
$7497\ m^3 = \ldots\ldots hm^3$
$1,638\ km^3 = \ldots\ldots dam^3$
$26,2\ cm^3 = \ldots\ldots m^3$
$7,63\ dm^3 = \ldots\ldots mm^3$
$2,39\ km^3 = \ldots\ldots dm^3$

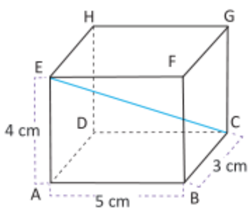
2) Determinar el volumen del siguiente cono recto.



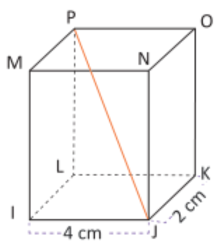
3) Determinar el volumen de la pirámide recta cuadrangular.



4) ¿Cuál es la medida de la diagonal $\overline{CE}$ del siguiente paralelepípedo recto?



5) Si en el paralelepípedo recto de la figura la diagonal $\overline{JP} = 3\sqrt{5}\ cm$, ¿cuánto mide su altura?



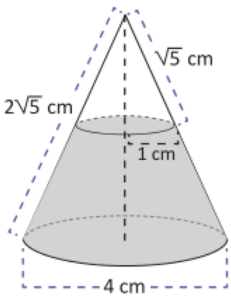
6) ¿Cuál es la capacidad, en litros, de un recipiente que tiene la forma de un prisma recto de base cuadrada de lado $5\ cm$ y altura

$0,4\ dm$?

7) Se tiene un prisma recto con base rectangular, el ancho de dicho rectángulo es igual al doble de su largo. Si el prisma tiene una altura de $10\ cm$ y volumen $100\ cm^3$, ¿cuáles son las dimensiones del prisma?

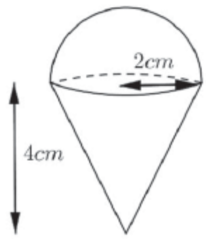
8) ¿Cuál es el volumen de una pirámide recta de base cuadrada de lado $8\ cm$ y de apotema $5\ cm$?

9) Calcular el volumen del cono truncado (sólido gris).



10) Con $0,003\ dam^3$ de arena se llenan $\dfrac{2}{3}$ de un arenero cilíndrico de $1,5\ m$ de radio. ¿Qué altura tiene el arenero?

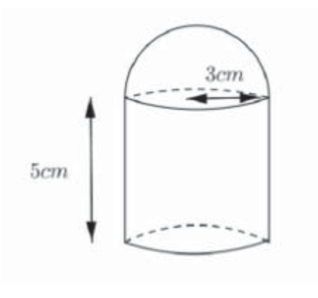
11) Obtener el volumen del sólido de la figura compuesto por un cono recto de $4\ cm$ de altura y una semiesfera de radio $2\ cm$.



12) Un frasco tiene forma cilíndrica de radio $5\ cm$ y altura $12\ cm$, está lleno de esferas metálicas de $15\ mm$ de diámetro. Se vierte hasta el tope del mismo un líquido lubricante del que luego se mide el volumen. ¿Aproximadamente cuántas bolitas hay en el frasco si se sabe que el líquido ocupa $\dfrac{2}{3}$ de su capacidad?

13) Obtener la altura de un prisma recto cuya base es un hexágono regular de lado $6\ cm$, sabiendo que el área total es $(360 + 108\sqrt{3})\ cm^2$.

14) Obtener el área del cascaron del sólido de la figura, formado por un cilindro recto de altura $5\ cm$, y una semiesfera de radio $3\ cm$. ¿Cuál es volumen de dicho sólido en mm^3?



15) Obtener el área de un cilindro que tiene el mismo volumen y radio de un cono de altura $0,1\ m$ y radio $4\ cm$.

16) Obtener el área de un tetraedro cuya arista mide $2\ dam$.

12. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

12.1. Práctica 1

1)

Grados sexagesimales	360^{o}	135^{o}	36^{o}	720^{o}	450^{o}	225^{o}	120^{o}	150^{o}	1800^{o}
Radianes	2π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{5}\pi$	4π	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	10π

2)

a) $\frac{3}{5}\pi\ cm \approx 1,88\ cm$

b) $\frac{28}{25}\pi\ cm \approx 3,52\ cm$

3) La longitud del arco recorrido es $\frac{25}{9}\pi\ cm \approx 8,7\ cm$.

4) Las siguientes respuestas son ejemplos de cada tipo de ángulo solicitado, hay otras posibles respuestas que también son correctas:

a) $A\hat{B}C$

b) $C\hat{B}E$

c) $C\hat{B}G$

d) $C\hat{B}F$

e) $C\hat{B}G\ y\ G\hat{B}E$

f) $C\hat{B}F\ y\ F\hat{B}A$

g) $E\hat{B}F\ y\ F\hat{B}A$

h) $C\hat{B}G\ y\ G\hat{B}A$

5)

a) $\hat{\beta} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

b) $\hat{\beta} = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$

c) $\hat{\beta} = 360^\circ - 90^\circ - 150^\circ = 120^\circ$

d) $\hat{\beta} = 180^\circ - 25^\circ - 90^\circ = 65^\circ$

6)

a) $\hat{\alpha}_3 = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_3 = 50^\circ$ (opustos por el vértice)

$\hat{\alpha}_2 = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$

b) $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_5 = 40^\circ$

$\hat{\alpha}_2 = 50^\circ\ (complementario\ de\ \hat{\alpha}_1)$

$\hat{\alpha}_3 = 40^\circ\ (complementario\ de\ \hat{\alpha}_2)$

$\hat{\alpha}_4 = 50^\circ$

7)

a) $\hat{\alpha}_1 = 70^\circ$

$\hat{\alpha}_2 = 110^\circ$

$\hat{\alpha}_3 = \hat{\alpha}_1 = 70^\circ$

$\hat{\alpha}_4 = \hat{\alpha}_1 = 70^\circ$

$\hat{\alpha}_5 = \hat{\alpha}_2 = 110^\circ$

$\hat{\alpha}_6 = \hat{\alpha}_4 = 70^\circ$

$\hat{\alpha}_7 = \hat{\alpha}_2 = 110^\circ$

$\hat{\alpha}_3 = 110^\circ$

b) $x = 107,5^\circ$

$\hat{\beta}_1 = 72,5^\circ$

$\hat{\beta}_2 = 107,5^\circ$

$\hat{\beta}_3 = \hat{x} = 107,5^\circ$

$\hat{\beta}_4 = 72,5^\circ$

$\hat{\beta}_5 = \hat{x} = 107,5^\circ$

$\hat{\beta}_6 = 72,5^\circ$

8) $x = 23^\circ,\ \alpha = 84^\circ\ y\ \beta = 96^\circ = \delta$

12.2. Práctica 2

1)

a) $x = 18^\circ,\ \alpha = 134^\circ,\ \beta = 46^\circ,\ \gamma = 73^\circ\ y\ \epsilon = 61^\circ$

b) $x = 32^\circ,\ \alpha = 110^\circ 30',\ \beta = 69^\circ 30',\ \gamma = 58^\circ 30'\ y\ \epsilon = 52^\circ$

2) $\alpha = 12^\circ,\ \beta = 48^\circ\ y\ \gamma = 120^\circ$

3) $\alpha = 72^\circ 18'$

4) $\alpha = 111^\circ 14'$

5) $H\hat{A}D = 20^\circ$

6) $B\hat{D}C = 131^\circ$

7) $A\hat{I}C = 106^\circ$

8)

a) $x = 60^\circ$

b) $x = 15^\circ$

c) $x = 110^\circ$

d) $x = 40^\circ$

9) $\widehat{A} = 15º\ 50'\ 24'',\ \widehat{B} = 140º$ y $\widehat{C} = 24º\ 9'\ 36''$

10) La circunferencia circunscripta es aquella que pasa por todos los vértices de un polígono.

Un hexágono regular se puede dividir en seis triángulos, donde cada triángulo tiene un vértice en el centro de la circunferencia circunscripta y los otros dos vértices en los vértices del hexágono.

Estos triángulos son isósceles, ya que dos de sus lados son radios de la circunferencia. Además, el ángulo central, que se forma en el centro de la circunferencia, mide $360º/6 = 60º$. Los ángulos de la base de cada triángulo son, por tanto, $(180º - 60º)/2 = 60º$. Esto significa que todos los ángulos son iguales, y por lo tanto, cada triángulo es equilátero.

En un triángulo equilátero, todos sus lados son de igual longitud. Si denotamos r como el radio de la circunferencia circunscripta, los lados de cada triángulo equilátero son iguales a r. Dado que cada lado del hexágono corresponde a uno de estos lados de los triángulos equiláteros, podemos concluir que cada lado del hexágono también mide r.

Por lo tanto, la medida del lado de un hexágono regular es igual al radio de la circunferencia circunscripta.

11)

a) 2

b) 360°

d) $S_n = (n-2).180^\circ$

12) Los ángulos del trapecio isósceles miden: $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ$ y 120°.

13) $118^\circ 20'$

14)

a) Un rombo a veces es un cuadrado.

b) Un cuadrado siempre es un rectángulo.

c) Un romboide nunca es un paralelogramo.

d) Los trapecios siempre tienen un par de lados paralelos.

e) Las diagonales de un paralelogramo siempre se bisecan.

f) Las diagonales de un trapecio a veces son congruentes.

g) La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero siempre es 360º.

h) Un cuadrado siempre es un rombo.

i) Un romboide siempre tiene un par de ángulos opuestos iguales.

15) $\frac{\sqrt{115}}{2}\ cm$

16) Sí, es un triángulo rectángulo.

17) Puedes mostrarlo utilizando el teorema de Pitágoras.

18)

a) No

b) Sí

c) Sí

d) No

12.3. Práctica 3

1)

Unidades de longitud:

$9\ km = 9000\ m$
$5\ cm = 50\ mm$
$5000\ m = 500\ dam$
$40\ mm = 4\ cm$
$900\ cm = 9\ m$
$5,36\ m = 536\ cm$
$15,9\ cm = 159\ mm$
$7497\ m = 74,97\ hm$
$1,638\ km = 163,8\ dam$
$26,2\ cm = 0,262\ m$
$7,63\ dm = 763\ mm$
$2,39\ km = 23900\ dm$

Unidades de área:

$9\ km^2 = 9000000\ m^2$
$5\ cm^2 = 500\ mm^2$
$5000\ m^2 = 50\ dam^2$
$40\ mm^2 = 0,4\ cm^2$
$900\ cm^2 = 0,09\ m^2$
$5,36\ m^2 = 53600\ cm^2$
$15,9\ cm^2 = 1590\ mm^2$
$7497\ m^2 = 0,7497\ hm^2$
$1,638\ km^2 = 16380\ dam^2$
$26,2\ cm^2 = 0,00262\ m^2$
$7,63\ dm^2 = 76300\ mm^2$
$2,39\ km^2 = 239000000\ dm^2$

2) $perímetro = 48\ cm\ y\ área = (48 + 16\sqrt{3})\ cm^2$

3) $32\ cm$

4) $20\sqrt{2}\ cm$

5)

a) $32\pi\ cm$

b) $(32 + \frac{14}{3}\pi)\ cm$

6)

a) $44,1\ cm^2$

b) $3\sqrt{3}\ cm^2$

7) $12,5\ m$

8) $lado = 4\sqrt{2}\ cm;\ área = 32\ cm^2$

9) $6\sqrt[4]{27}\ cm$

10) $\frac{25}{2}\pi\ cm^2$

12.4. Práctica 4

1)

$9\ km^3 = 9000000000\ m^3$
$5\ cm^3 = 5000\ mm^3$
$50\ cm^3 = 50000\ mm^3$
$5000\ m^3 = 5\ dam^3$
$40\ mm^3 = 0,04\ cm^3$
$900\ cm^3 = 0,0009\ m^3$
$5,36\ m^3 = 5360000\ cm^3$
$15,9\ cm^3 = 15900\ mm^3$
$7497\ m^3 = 0,007497\ hm^3$
$1,638\ km^3 = 1638000\ dam^3$
$26,2\ cm^3 = 0,0000262\ m^3$
$7,63\ dm^3 = 7630000\ mm^3$
$2,39\ km^3 = 2390000000000\ dm^3$

2) $3\pi\sqrt{55}\ cm^3$

3) $\frac{4}{3}\sqrt{7}\ cm^3$

4) $\sqrt{50}\ cm$

5) $5\ cm$

6) $0,1\ l$

7) $largo = \sqrt{5}\ cm\ y\ ancho = 2\sqrt{5}\ cm$

8) $64\ cm^3$

9) $\frac{14}{3}\pi\ cm^3$

10) $\frac{2}{\pi}\ m$

11) $\frac{32}{3}\pi\ cm^3$

12) Aproximadamente $177\ bolitas$

13) $10\ cm$

14) á$rea = 57\pi\ cm^2\ y\ volumen \approx 197820\ mm^3$

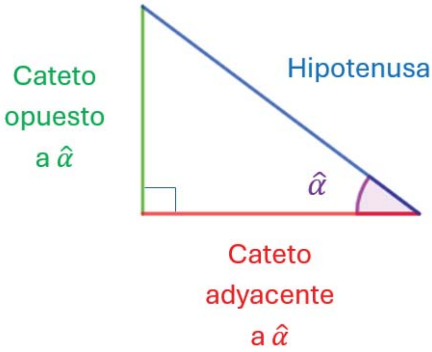
15) $\frac{176}{3}\pi\ cm^2$

16) $4\sqrt{3}\ dam^2$

Trigonometría

Tabla de contenidos

1. Razones trigonométricas



En un triángulo rectángulo se definen las razones trigonométricas de sus ángulos agudos como sigue:

Seno de $\hat{\alpha}$:

$$sen(\hat{\alpha}) = \frac{Cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$$

Coseno de $\hat{\alpha}$:

$$cos(\hat{\alpha}) = \frac{Cateto\ adyacente\ a\ \alpha}{Hipotenusa}$$

Tangente de $\hat{\alpha}$:

$$tg(\hat{\alpha}) = \frac{Cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{Cateto\ adyacente\ a\ \alpha}$$

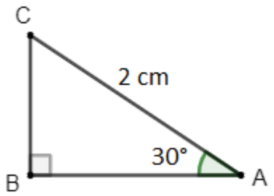
Nota: en las calculadoras el seno es sin y la tangente es tan.

2. Resolución de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo consiste en averiguar la longitud de sus lados y la amplitud de sus ángulos, conociendo un ángulo (además del ángulo recto) y un lado, o conociendo dos de sus lados. Para esto se podrán usar el Teorema de Pitágoras, la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo y las razones trigonométricas.

Ejemplos:

1) Resolver el siguiente triángulo rectángulo:



En este caso tenemos como datos, además del ángulo recto, el ángulo $\hat{A} = 30^\circ$ y la hipotenusa $AC = 2\,cm$.

Para averiguar el ángulo que falta, podemos usar la propiedad de la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$

$30^\circ + 90^\circ + \hat{C} = 180^\circ$

$\hat{C} = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ$

$\hat{C} = 60^\circ$

Ahora, para obtener uno de los catetos faltantes, usamos una de las razones trigonométricas que involucre a la hipotenusa, ya que es el dato que conocemos, y al cateto que deseamos averiguar. Si por ejemplo, queremos averiguar el cateto BC, que es el cateto opuesto a $\hat{A}$, plantearemos el seno de $\hat{A}$.

$$sen(\hat{A}) = \frac{BC}{AC} \Longrightarrow sen(30^\circ) = \frac{BC}{2\,cm} \Longrightarrow BC = 0,5.\,2\,cm = 1\,cm$$

Finalmente, para obtener el cateto faltante, podemos usar el Teorema de Pitágoras.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

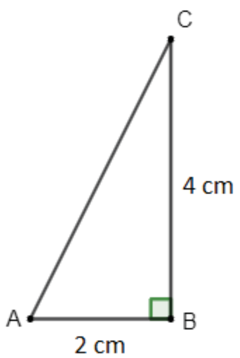
$AB^2 + (1\,cm)^2 = (2\,cm)^2$

$AB^2 = 4\,cm^2 - 1\,cm^2$

$AB^2 = 3\,cm^2$

$AB = \sqrt{3}\,cm$

2) Resolver el siguiente triángulo rectángulo:



En este caso tenemos como datos, además del ángulo recto, ambos catetos $AB = 2\,cm$ y $BC = 4\,cm$.

Para hallar la hipotenusa, usaremos el Teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 = (2\,cm)^2 + (4\,cm)^2$$

$$AC^2 = 4\,cm^2 + 16\,cm^2$$

$$AC^2 = 20\,cm^2$$

$$AC = \sqrt{20}\,cm$$

Para averiguar uno de los ángulos agudos, debemos recurrir a alguna de las razones trigonométrica que involucre al ángulo en cuestión y a dos de los lados del triángulo que ya conozcamos. Luego, con la calculadora buscaremos su valor usando la “función inversa” de la razón elegida, que se encuentra generalmente combinando las teclas SHIFT con SIN (seno), COS (coseno) o TAN (tangente), según corresponda. En el visor de la calculadora se verá sin^{-1}, cos^{-1} o tan^{-1}.

En este caso, si por ejemplo queremos averiguar el ángulo $\hat{A}$, podemos plantear la tangente de $\hat{A}$.

$$tg(\hat{A}) = \frac{BC}{AB} \Longrightarrow tg(\hat{A}) = \frac{4\,cm}{2\,cm} \Longrightarrow tg(\hat{A}) = 2\,cm \Longrightarrow \hat{A} = tg^{-1}(2) \Longrightarrow \hat{A} \simeq 63^\circ 26' 6''$$

Para averiguar el ángulo faltante, podemos plantear la suma de los ángulos interiores del triángulo:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

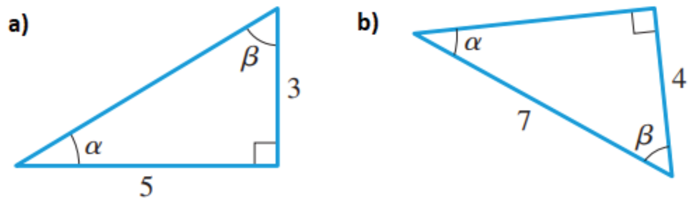
$$63^\circ 26' 6'' + 90^\circ + \hat{C} \simeq 180^\circ$$

$$\hat{C} \simeq 180^\circ - 63^\circ 26' 6'' - 90^\circ$$

$$\hat{C} \simeq 26^\circ 33' 54''$$

3. Práctica 1

1) Hallar los valores exactos del seno, el coseno y la tangente de $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$.



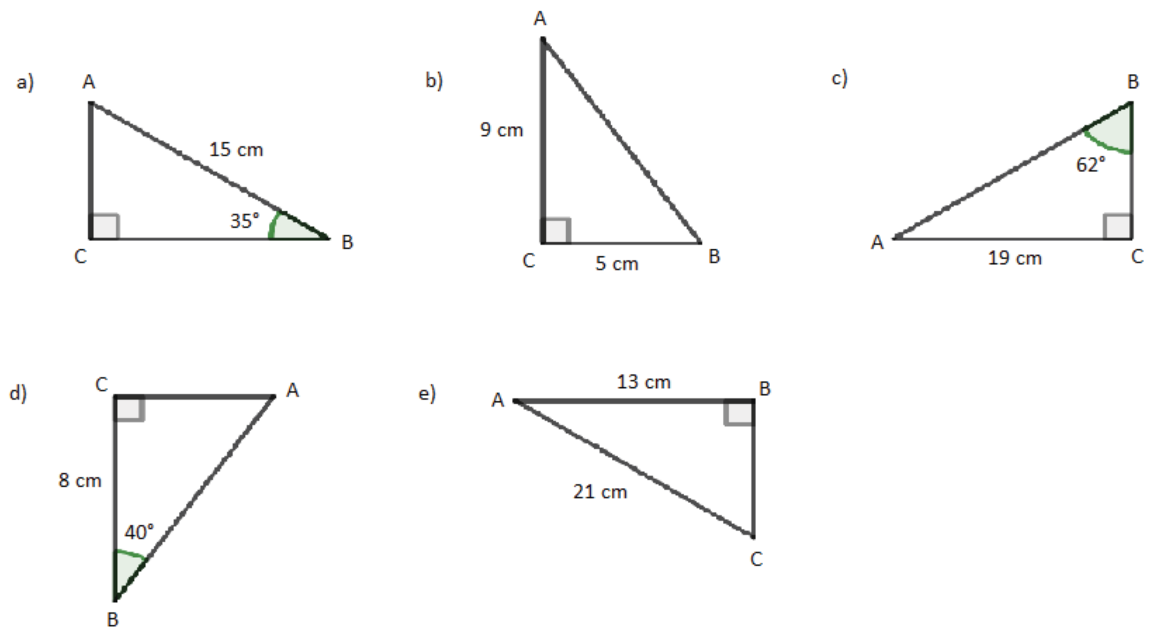
2) Graficar, en cada caso, un triángulo rectángulo que tenga un ángulo agudo $\hat{\alpha}$ que cumpla con lo pedido. Hallar las dos razones trigonométricas restantes.

a) $sen(\hat{\alpha}) = \dfrac{2}{3}$

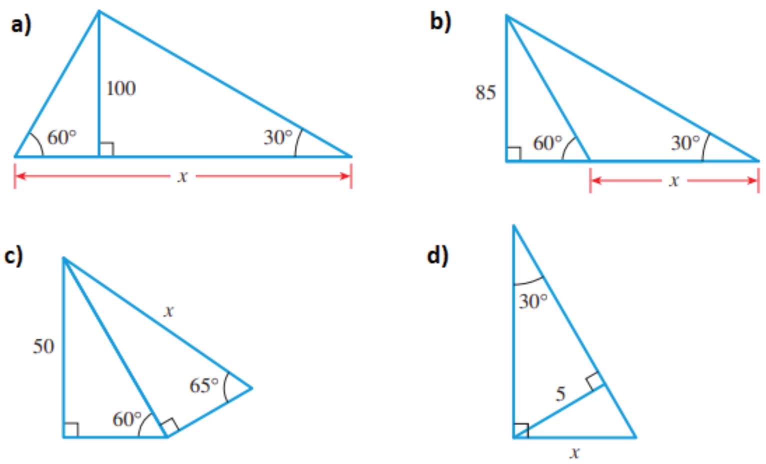
b) $cos(\hat{\alpha}) = \dfrac{1}{4}$

c) $tg(\hat{\alpha}) = \dfrac{4}{3}$

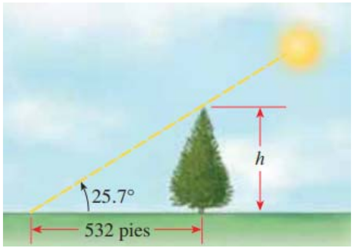
3) Resolver los siguientes triángulos rectángulos.



4) Hallar el valor de x.

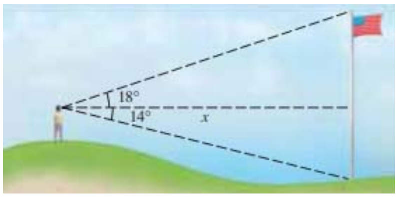


5) Un árbol proyecta una sombra de 532 pies de largo. Encontrar la altura del árbol si el ángulo de elevación del Sol es $25,7^\circ$.

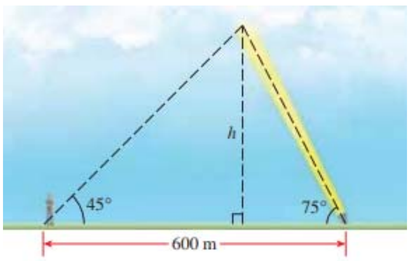


6) Un avión despega formando un ángulo de 20º con el suelo y recorre en esa dirección $25\ km$. ¿A qué altura se encuentra?

7) Una mujer que está de pie en una colina observa un mástil que ella sabe es de $18m$ de alto. El ángulo de depresión a la parte inferior del poste es de 14° y el ángulo de elevación de la parte superior del poste es de 18°. Encuentre la distancia x de la mujer al poste.



8) Para medir la altura de la capa de nubes en un aeropuerto, un trabajador enciende un reflector hacia arriba, a un ángulo de 75° con la horizontal. Un observador a $600\ m$ de distancia mide el ángulo de elevación del reflector y ve que es de 45°. Encuentre la altura h de la capa de nubes.



9) Un árbol y un observador se encuentran en orillas separadas de un río. El observador mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 33º, retrocede $5\ m$ y mide el nuevo ángulo, resultando el mismo de 23º. ¿Cuál es la altura aproximada del árbol?

10) Calcular la longitud de la altura de un triángulo equilátero de lado $4\ cm$.

11) Los lados de un paralelogramo miden $22\ cm$ y $40\ cm$, respectivamente. Calcular el área del mismo, sabiendo que uno de sus ángulos mide 30º.

12) Un edificio proyecta una sombra de $20\ m$ cuando el sol se encuentra a 45º sobre el horizonte. ¿Cuál es su altura?

13) Una calle tiene una pendiente del 10%, esto significa que cada $100\ m$ recorridos en horizontal el desnivel aumenta $10\ m$. ¿Qué ángulo forma la calle con la horizontal?

4. Razones trigonométricas de ángulos cualesquie

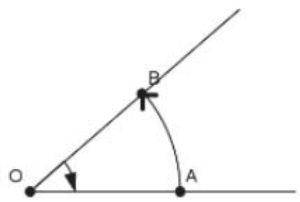
Las definiciones de las razones trigonométricas que vimos para ángulos agudos en triángulos rectángulos, se pueden hacer extensivas a cualquier ángulos orientado por medio de la Circunferencia Trigonométrica.

A continuación, veremos algunas definiciones previas.

4.1. Ángulos orientados

Consideremos la semirrecta OA girando alrededor de O (siempre en el mismo plano) hasta llegar a la posición OB.

Decimos que esta rotación ha generado el **ángulo orientado** $A\hat{O}B$, de vértice O, lado inicial OA y final OB.

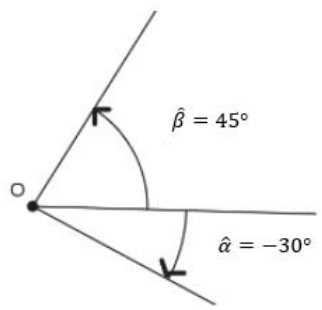


También se dice que, en este caso, el ángulo ha sido **generado positivamente** (por rotar en sentido contrario a las agujas del reloj).

Ahora bien, el mismo ángulo se podría haber obtenido rotando OB hacia OA, de esta forma la **rotación es negativa**.

Diremos entonces que un ángulo es **positivo** si fue generado al girar la semirrecta en sentido antihorario (contrario al movimiento de las agujas del reloj), y diremos que es **negativo** si se generó en sentido horario.

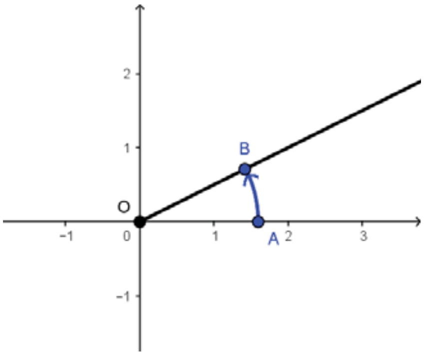
Ejemplos:



- Si $\hat{\alpha} = -30$º, significa que tiene una amplitud de 30º, pero se generó en sentido negativo (horario).
- Si $\hat{\beta} = 45$º, significa que tiene una amplitud de 45º, pero se generó en sentido positivo (antihorario).

4.2. Ángulos en posición normal

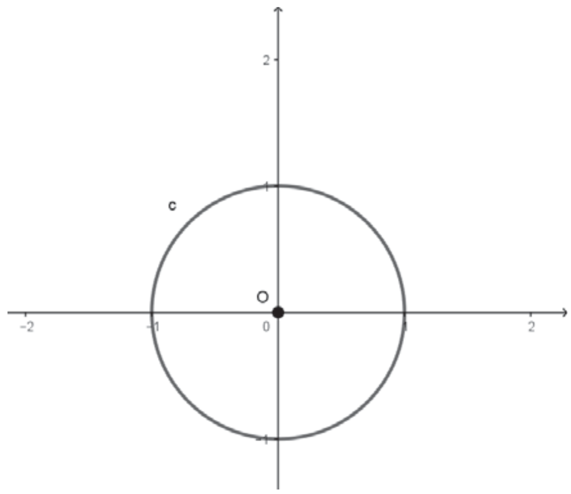
Un **ángulo en posición normal** es un ángulo orientado, ubicado en un sistema de coordenadas cartesianas, en donde su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el semieje positivo de las x.



El ángulo $A\hat{O}B$ es un ángulo en posición normal.

4.3. Circunferencia trigonométrica

La **circunferencia trigonométrica o unitaria** es una circunferencia de radio 1 unidad, cuyo centro está en el origen de coordenadas.

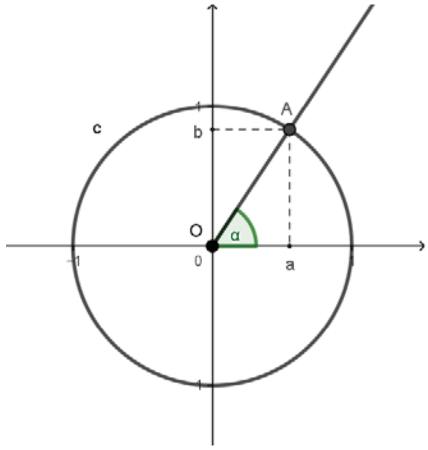


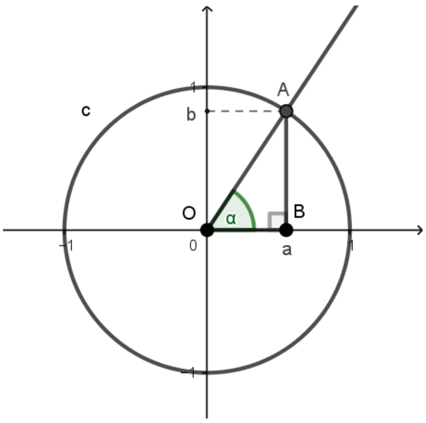
4.4. Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera

Las definiciones de las razones trigonométricas que vimos para ángulos agudos en triángulos rectángulos, se pueden hacer extensivas a cualquier ángulos orientado por medio de la Circunferencia Trigonométrica.

Consideremos el ángulo $\hat{\alpha}$ en posición normal, cuyo lado final interseca a la circunferencia trigonométrica en el punto A de coordenadas positivas (a, b).

Si además consideramos el punto B de coordenadas $(a, 0)$, el triángulo AOB resulta rectángulo en $\hat{B}$.





Por lo tanto, se cumplen las siguientes razones trigonométricas:

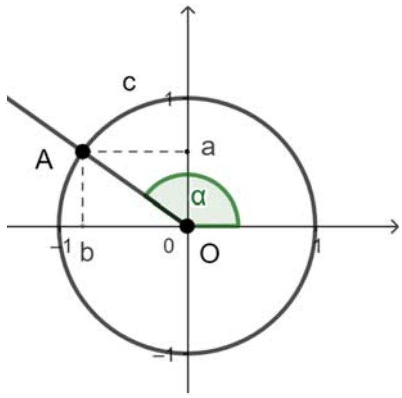
$$sen(\hat{\alpha}) = \frac{AB}{OA} = \frac{b}{1} = b$$

$$cos(\hat{\alpha}) = \frac{OB}{OA} = \frac{a}{1} = a$$

$$tg(\hat{\alpha}) = \frac{AB}{OB} = \frac{b}{a}$$

Ahora extenderemos estas definiciones a un ángulo cualquiera.

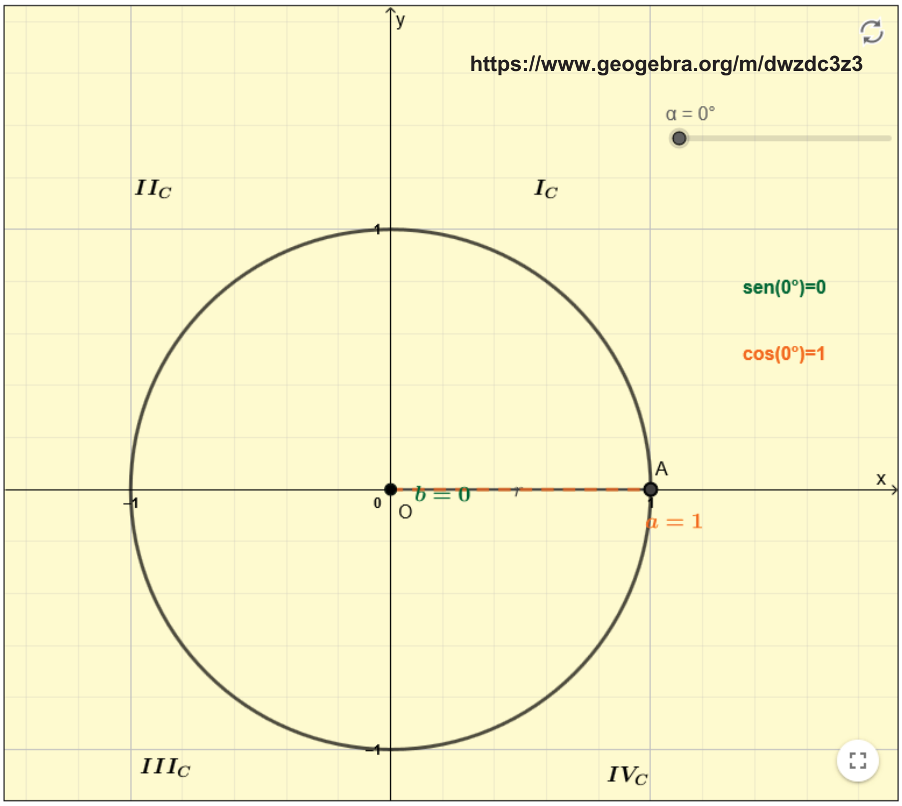
Si el ángulo $\hat{\alpha}$ interseca a la circunferencia trigonométrica en un punto A de coordenadas (a, b) cualesquiera, entonces:



$$cos(\hat{\alpha}) = a$$

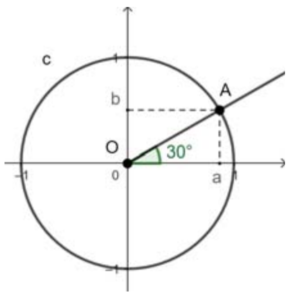
$$sen(\hat{\alpha}) = b$$

$$tg(\hat{\alpha}) = \frac{sen(\hat{\alpha})}{cos(\hat{\alpha})}, \text{ si } a \neq 0$$

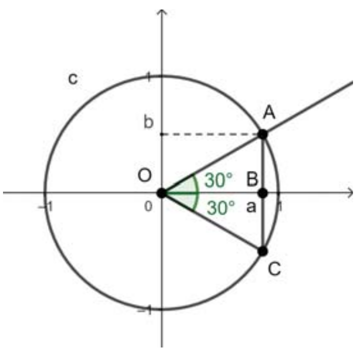


Ejemplos:

1) Hallar en forma exacta los valores del seno, coseno y tangente de $\hat{\alpha} = 30^\circ$.



El ángulo $\hat{\alpha} = 30^\circ$ interseca a la circunferencia trigonométrica en el punto $A(a, b)$. Debemos encontrar las coordenadas de dicho punto. Para ello trazaremos el triángulo AOC como se muestra en la siguiente figura:



Dado que $OA = OC = 1$, el triángulo AOC resulta isósceles y $O\hat{A}C = O\hat{C}A$.

Además, como $A\hat{O}C = A\hat{O}B + B\hat{O}C = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$, por la suma de los ángulos interiores de un triángulo resulta $O\hat{A}C = O\hat{C}A = 60^\circ$, con lo cual el triángulo AOC es equilátero.

Luego, $AC = 1$ y como B es el punto medio de AC, $AB = AC = \frac{1}{2}$. Con lo cual $b = \frac{1}{2}$.

Ahora, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo AOB, podemos hallar el valor de $a = OB$.

$$OB^2 + AB^2 = OA^2$$

$$OB^2 + (\frac{1}{2})^2 = 1^2$$

$$OB^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$OB^2 = \frac{3}{4}$$

$OB = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Luego, $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo tanto:

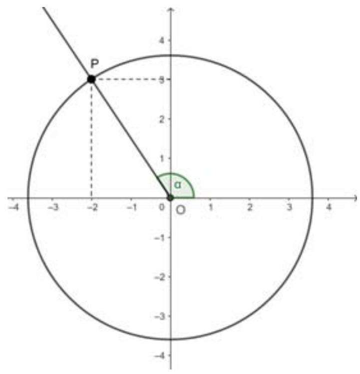
$cos(30^\circ) = a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$sen(30^\circ) = b = \frac{1}{2}$

$tg(30^\circ) = \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

2) Obtener los valores del seno, coseno y la tangente para el ángulo $\hat{\alpha}$ cuyo lado final contiene al punto $P(-2, 3)$.

Primero debemos calcular el radio r de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas, que pasa por el punto P. Para ello usaremos el Teorema de Pitágoras:



$r^2 = 3^2 + 2^2$

$r^2 = 9 + 4$

$r = \sqrt{13}$

Luego:

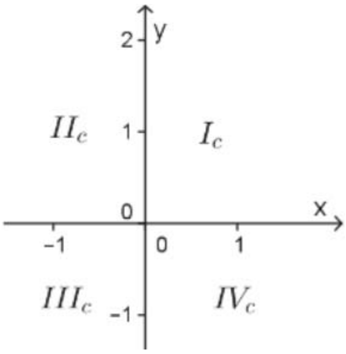
$cos(\hat{\alpha}) = \frac{a}{r} = \frac{-2}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$

$sen(\hat{\alpha}) = \frac{b}{r} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$tg(\hat{\alpha}) = \frac{b}{a} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$

4.5. Signos de las razones trigonométricas en los distintos cuadrantes

Los ejes coordenados dividen al plano en cuatro zonas, que denominaremos **cuadrantes**.



Sea $P(x,y)$,

$P \in Ic$ si $x > 0$ y $y > 0$.

$P \in IIc$ si $x < 0$ y $y > 0$.

$P \in IIIc$ si $x < 0$ y $y < 0$.

$P \in IVc$ si $x > 0$ y $y < 0$.

Diremos que un ángulo pertenece a algún cuadrante, cuando el punto de intersección del lado final del ángulo con la circunferencia trigonométrica esté en dicho cuadrante.

Según el cuadrante al que pertenezca el ángulo $\hat{\alpha}$, los signos de las razones trigonométricas son:

$\hat{\alpha}$	Ic	IIc	$IIIc$	IVc
$sen(\hat{\alpha})$	$+$	$+$	$-$	$-$
$cos(\hat{\alpha})$	$+$	$-$	$-$	$+$
$tg(\hat{\alpha})$	$+$	$-$	$+$	$-$

4.6. Práctica 2

1) Completar:

La circunferencia trigonométrica es la circunferencia con centro en _____ y radio _____.

2) Suponiendo que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, completar con la coordenada faltante:

a) $P(1, \ldots)$

b) $P(\ldots, 1)$

c) $P(-1, \ldots)$

d) $P(\ldots, -1)$

3) El punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encontrar la coordenada faltante a partir de la información dada y representar gráficamente.

a) La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$, y la coordenada y es positiva.

b) La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$, y la coordenada x es positiva.

c) La coordenada x de P es $-\frac{3}{5}$, y P está en el tercer cuadrante.

d) La coordenada y de P es $\frac{2}{7}$, y P está en el segundo cuadrante.

4) En cada caso, representar en posición normal todos los ángulos $\hat{\alpha} \in [0, 2\pi)$ que cumplan lo pedido.

a) $sen(\hat{\alpha}) = 0$

b) $cos(\hat{\alpha}) = 1$

c) $cos(\hat{\alpha}) = \frac{1}{3}$

d) $sen(\hat{\alpha}) = -\frac{2}{5}$

5) Completar la tabla con los valores exactos.

$\hat{\alpha}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$sen(\hat{\alpha})$								
$cos(\hat{\alpha})$								
$tg(\hat{\alpha})$								

6) Sin usar calculadora, hallar el valor exacto de x.

a) $x = 3.sen(\frac{\pi}{2}) + 5.tg(\frac{\pi}{4}) - 2.cos(0)$

b) $x - 3 = tg(\frac{\pi}{3}) + cos^2(\frac{\pi}{6})$

7) Obtener los valores de $sen(\hat{\alpha})$, $cos(\hat{\alpha})$ y $tg(\hat{\alpha})$ de un ángulo $\hat{\alpha}$ cuyo lado final contiene al punto P.

a) $P(1, 3)$

b) $P(-1, 2)$

c) $P(3, -2)$

d) $P(-1, -1)$

5. Propiedades

En esta sección veremos algunas propiedades del seno y del coseno de un ángulo.

5.1. Propiedades del seno y del coseno de un ángulo

1) Acotación del seno y del coseno:

$-1 \leq sen(\alpha) \leq 1$

$-1 \leq cos(\alpha) \leq 1$

2) Periodicidad del seno y del coseno:

$sen(\alpha) = sen(\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

$cos(\alpha) = cos(\alpha + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

3) Paridad del coseno e imparidad del seno:

$cos(-\alpha) = cos(\alpha)$

$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$

4) Relación Pitagórica:

$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$

5) Relación entre el seno y el coseno de ángulos complementarios:

$sen(\frac{\pi}{2} - \alpha) = cos(\alpha)$

$cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = sen(\alpha)$

5.2. Seno y coseno de la suma de dos ángulos

1) $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha).\, cos(\beta) + cos(\alpha).\, sen(\beta)$

2) $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).\, cos(\beta) - sen(\alpha).\, sen(\beta)$

3) $sen(\alpha - \beta) = sen(\alpha).\, cos(\beta) - cos(\alpha).\, sen(\beta)$

4) $cos(\alpha - \beta) = cos(\alpha).\, cos(\beta) + sen(\alpha).\, sen(\beta)$

De la propiedad **1)**, tomando $\beta = \alpha$, se desprende:

5) $sen(2.\alpha) = 2.sen(\alpha).\, cos(\alpha)$

De la propiedad **2)**, tomando $\beta = \alpha$, se desprende:

6) $cos(2.\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$

6. Razones recíprocas del coseno, seno y tangente

Se definen las razones trigonométricas recíprocas del coseno, el seno y la tangente, respectivamente, como:

Secante de x:

$$sec(x) = \frac{1}{cos(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } cos(x) \neq 0$$

Cosecante de x:

$$cosec(x) = \frac{1}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } sen(x) \neq 0$$

Cotangente de x:

$$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{cos(x)}{sen(x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R} \text{ tal que } sen(x) \neq 0$$

7. Identidades trigonométricas

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran razones trigonométricas y son ciertas para todos los valores de las variables en las que están definidas. Estas identidades son útiles para simplificar expresiones trigonométricas, resolver ecuaciones y realizar otro tipo de cálculos.

Para demostrar que una identidad trigonométrica es válida, se parte de uno de los dos lados de la igualdad y, usando las propiedades y relaciones vistas, se llega al otro lado. En algunos casos, se pueden trabajar por separado ambos lados de la igualdad hasta llegar a expresiones equivalentes.

Ejemplos

Demostrar las siguientes identidades trigonométricas.

1) $(1+sen(x)).(1-sen(x))=cos^2(x)$

Partiremos del lado izquierdo de la igualdad, y trataremos de llegar al lado derecho.

$(1+sen(x)).(1-sen(x))=$

$=1-sen^2(x)=\quad\longleftarrow$ Diferencia de cuadrados

$=cos^2(x)\quad\longleftarrow$ Identidad Pitagórica: $sen^2(x)+cos^2(x)=1\Rightarrow 1-sen^2(x)=cos^2(x)$

2) $cosec(x).tg(x)=sec(x)$

Partiremos del lado izquierdo de la igualdad, y trataremos de llegar al lado derecho.

$cosec(x).tg(x)=$

$=\dfrac{1}{sen(x)}.\dfrac{sen(x)}{cos(x)}=\quad\longleftarrow$ Definiciones de cosecante y tangente

$=1.\dfrac{1}{cos(x)}=\quad\longleftarrow$ Simplificación de $sen(x)$

$=sec(x)\quad\longleftarrow$ Definición de secante

3) $(sen(x)+cos(x))^2=2.tg(x).cos^2(x)+1$

En este caso trabajaremos ambos lados de la igualdad por separado, hasta llegar a expresiones equivalentes.
Empecemos con el lado izquierdo:

$(sen(x)+cos(x))^2=$

$=sen^2(x)+2.sen(x).cos(x)+cos^2(x)=\quad\longleftarrow$ Cuadrado de un binomio

$=2.sen(x).cos(x)+(sen^2(x)+cos^2(x))=\quad\longleftarrow$ Propiedades conmutativa y asociativa

$=2.sen(x).cos(x)+1\quad\longleftarrow$ Identidad Pitagórica $sen^2(x)+cos^2(x)=1$

Ahora trabajemos el lado derecho de la igualdad:

$2.tg(x).cos^2(x)+1=$

$=2.\dfrac{sen(x)}{cos(x)}.cos^2(x)+1=\quad\longleftarrow$ Definición de tangente

$=2.sen(x).cos(x)+1\quad\longleftarrow$ Simplificación de $cos(x)$

Como en ambos casos se llegó a la misma expresión, la identidad $(sen(x)+cos(x))^2=2.tg(x).cos^2(x)+1$ es válida.

8. Práctica 3

1) Obtener el valor exacto del $sen(x)$ en cada caso.

a) $cos(x) = \frac{1}{5}$ y $x \in IVc$

b) $cos(x) = -\frac{2}{5}$ y $x \in IIc$

c) $tg(x) = 2$ y $x \in Ic$

2) Explicar por qué son ciertas las siguientes igualdades.

a) $sen(\frac{\pi}{4}) = cos(\frac{\pi}{4})$

b) $sen(\frac{2}{7}\pi) = cos(\frac{3}{14}\pi)$

c) $sen(\frac{\pi}{3}) = cos(-\frac{\pi}{6})$

d) $sen(7\pi) = sen(\pi)$

e) $sec(x + \frac{\pi}{5}) = cosec(\frac{3}{10}\pi - x)$

f) $tg(-x) = -tg(x)$

3) ¿Es correcto afirmar que si $tg(x) = \frac{2}{3}$, entonces $sen(x) = 2$ y $cos(x) = 3$? ¿por qué?

4) Verificar las siguientes identidades trigonométricas.

a) $cotg(x).\, sen(x) = cos(x)$

b) $sec(x).\, tg(x).\, cosec(x) = sec^2(x)$

c) $1 + tg^2(x) = sec^2(x)$

d) $1 + ctg^2(x) = cosec^2(x)$

e) $(sen(x) + cos(x))^2 - 1 = sen(2x)$

f) $\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)} = sec(x)$

5) Obtener en cada caso el valor exacto del $sen(x + y)$ y $sen(x - y)$.

a) $sen(x) = \frac{2}{5},\ sen(y) = \frac{1}{10},\ x, y \in Ic$

b) $tg(x) = -\frac{2}{3},\ sen(y) = \frac{1}{10}, x \in IVc,\ y \in Ic$

c) $sen(x) = -\frac{3}{5},\ cos(y) = \frac{1}{5},\ x \in IIIc,\ y \in Ic$

9. Respuestas

A continuación, se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

9.1. Práctica 1

1)

a) $sen(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{34}};\ cos(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{34}};\ tg(\alpha) = \frac{3}{5}$

$sen(\beta) = \frac{5}{\sqrt{34}};\ cos(\beta) = \frac{3}{\sqrt{34}};\ tg(\beta) = \frac{5}{3}$

b) $sen(\alpha) = \frac{4}{7};\ cos(\alpha) = \frac{\sqrt{33}}{7};\ tg(\alpha) = \frac{4}{\sqrt{33}}$

$sen(\beta) = \frac{\sqrt{33}}{7};\ cos(\beta) = \frac{4}{7};\ tg(\beta) = \frac{\sqrt{33}}{4}$

2)

a) $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3};\ tg(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

b) $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{15}}{4};\ tg(\alpha) = \sqrt{15}$

c) $sen(\alpha) = \frac{4}{5};\ cos(\alpha) = \frac{3}{5}$

3)

a) $AC = 8,6\ cm,\ \hat{A} = 55^\circ\ y\ \ BC = 12,29\ cm$

b) $AB = \sqrt{106}\ cm,\ \hat{A} = 29^\circ 3'\ y\ \ \hat{B} = 60^\circ 57'$

c) $BC = 10,1\ cm,\ \hat{A} = 28^\circ\ y\ \ AB = 21,52\ cm$

d) $AB = 10,44\ cm,\ \hat{A} = 50^\circ\ y\ \ AC = 6,71\ cm$

e) $BC = 16,49\ cm,\ \hat{A} = 51^\circ 45'\ y\ \ \hat{C} = 38^\circ 15'$

4)

a) $x = 230,94$

b) $x = 98,15$

c) $x = 63,7$

d) $x = 5,77$

5) La altura del árbol es de 256 pies

6) El avión se encuentra a $8,55\ km$ de altura

7) La distancia es $x = 31,35\ m$

8) $h = 473,2\ m$

9) El árbol tiene aproximadamente $6,13\ m$ de altura

10) $2\sqrt{3}\ cm$

11) $440\ cm^2$

12) La altura es de $20\ m$

13) Forma un ángulo de $5^\circ 42' 38''$

9.2. Práctica 2

1) La circunferencia trigonométrica es la circunferencia con centro en (0,0) y radio 1.

2)

a) $P(1,0)$

b) $P(0,1)$

c) $P(-1,0)$

d) $P(0,-1)$

3)

a) La coordenada y es $\frac{3}{5}$

b) La coordenada x es $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

c) La coordenada y es $-\frac{4}{5}$

d) La coordenada x es $-\frac{3\sqrt{5}}{7}$

5)

$\hat{\alpha}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$sen(\hat{\alpha})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$cos(\hat{\alpha})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg(\hat{\alpha})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$	0

6)

a) $x = 6$

b) $x = \sqrt{3} + \frac{15}{4}$

7)

a) $sen(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{10}};\ cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{10}};\ tg(\alpha) = 3$

b) $sen(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}};\ cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}};\ tg(\alpha) = -2$

c) $sen(\alpha) = -\frac{2}{\sqrt{13}};\ cos(\alpha) = \frac{3}{\sqrt{13}};\ tg(\alpha) = -\frac{2}{3}$

d) $sen(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ cos(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}};\ tg(\alpha) = 1$

9.3. Práctica 3

1)

a) $sen(x) = -\frac{\sqrt{24}}{5}$

b) $sen(x) = \frac{\sqrt{21}}{5}$

c) $sen(x) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2)

a) Puede explicarse por la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios

b) Puede explicarse por la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios

c) Puede explicarse por la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios y la paridad del coseno

d) Puede explicarse por la propiedad de periodicidad del seno

e) Puede explicarse por la relación entre seno y coseno de ángulos complementarios, previamente aplicando las definiciones de las funciones recíprocas.

f) Puede explicarse por la propiedad de paridad del coseno e imparidad del seno.

3) No es correcto por la propiedad de acotación del $sen(x)$ y $cos(x)$

4)

a) $cotg(x).\, sen(x) = \frac{cos(x)}{sen(x)}.\, sen(x) = cos(x)$

b) $sec(x).\, tg(x).\, cosec(x) = \frac{1}{cos(x)}.\, \frac{sen(x)}{cos(x)}.\, \frac{1}{sen(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$

c) $1 + tg^2(x) = 1 + \frac{sen^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{cos^2(x)} = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$

d) $1 + ctg^2(x) = 1 + \frac{cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{sen^2(x)+cos^2(x)}{sen^2(x)} = \frac{1}{sen^2(x)} = cosec^2(x)$

e) $(sen(x) + cos(x))^2 - 1 = sen^2(x) + 2sen(x)cos(x) + cos^2(x) - 1 =$

$= (sen^2(x) + cos^2(x)) + 2sen(x)cos(x) - 1 = 1 + 2sen(x)cos(x) - 1 = sen(2x)$

f) $\frac{sen(2x)}{sen(x)} - \frac{cos(2x)}{cos(x)} = \frac{2sen(x)cos(x)}{sen(x)} - \frac{cos^2(x)-sen^2(x)}{cos(x)} =$

$= \frac{2sen(x)cos(x)}{sen(x)} - \frac{cos^2(x)}{cos(x)} + \frac{sen^2(x)}{cos(x)} = 2cos(x) - cos(x) + \frac{sen^2(x)}{cos(x)} =$

$= cos(x) + \frac{1-cos^2(x)}{cos(x)} = cos(x) + \frac{1}{cos(x)} - cos(x) = sec(x)$

5)

a) $sen(x+y) = \frac{6\sqrt{11}+\sqrt{21}}{50};\ sen(x-y) = \frac{6\sqrt{11}-\sqrt{21}}{50}$

b) $sen(x+y) = \frac{-6\sqrt{11}+3}{10\sqrt{13}};\ sen(x-y) = -\frac{6\sqrt{11}+3}{10\sqrt{13}}$

c) $sen(x+y) = \frac{-3-8\sqrt{6}}{25};\ sen(x-y) = \frac{-3+8\sqrt{6}}{25}$

Lógica

Tabla de contenidos

1. Algunos términos matemáticos

El lenguaje matemático que utilizamos debe ser muy preciso, sin ambigüedades. No debe dar lugar a distintas interpretaciones (como puede ocurrir con el lenguaje coloquial). Cada símbolo tiene un significado inequívoco.

Por ejemplo si decimos: "*¿Me pongo el saco rojo **o** el verde?*" estamos preguntando si hacemos una cosa o la otra, pero no ambas. En cambio si decimos: *"Descartamos la ropa que esté vieja **o** que nos quede chica"* queremos decir una cosa, la otra o ambas. No significa lo mismo "**o**" en cada una de estas frases.

En matemática, el significado de "**o**" es el de este último caso. Si decimos que *un elemento está en un conjunto A **o** en B*, queremos decir que puede estar en *A* o en *B* (o en ambos). Si decimos que *un número es mayor **o** igual que 5*, ese número puede ser 8, puede ser 1000000, puede ser 5,1… cualquiera más grande, o puede ser el mismo 5.

Y el significado de "**y**" implica que deben darse simultáneamente las dos cosas. Si decimos que *un elemento está en un conjunto A **y** en B*, queremos decir que está simultáneamente en los dos conjuntos (no puede estar en uno y no en el otro). Si decimos que *un número es mayor que 1 **y** menor que 3*, ese número puede ser $\sqrt{2}$, puede ser $\frac{3}{2}$, puede ser 2… pero no puede ser 4 (aunque sea mayor que 1) ni puede ser 0 (aunque sea menor que 3) porque deben cumplirse las dos condiciones al mismo tiempo.

1.1. Definiciones, conceptos primitivos y axiomas

Una **definición** es un enunciado por medio del cual se exponen, de manera clara y precisa, las características distintivas de un concepto.

Sin embargo en matemática hay ciertos conceptos, llamados **conceptos primitivos**, que no tienen una definición y se acepta la idea que tenemos sobre ellos (por ejemplo: punto, recta, pertenece, conjunto).

De la misma manera, los **axiomas** son postulados evidentes que admitimos sin demostración.

Ejemplos de axiomas son:

Todo número natural tiene un sucesor

Es posible prolongar un segmento de recta continuamente en ambas direcciones.

1.2. Teoremas, conjeturas, corolarios

Teorema

Un **teorema** es un enunciado siempre verdadero que debe demostrarse. Partiendo de algunos supuestos (**hipótesis**), se afirma una conclusión (**tesis**).

Ejemplo:

Teorema: *La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°*.

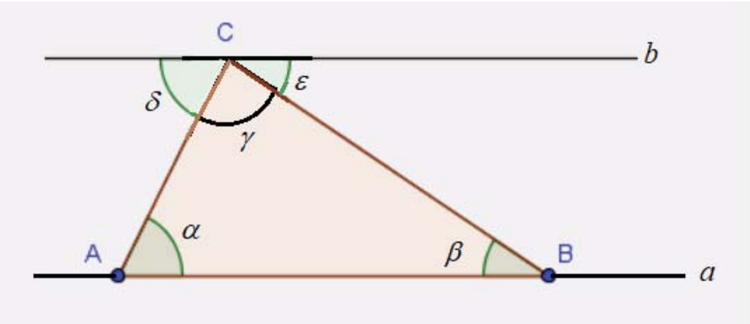
La **hipótesis** es: ABC *es un triángulo*

La **tesis** es*: la suma de sus ángulos interiores es 180°*

A diferencia de otras ciencias donde puede haber comprobaciones experimentales, para hacer una **demostración** en matemática se utilizan propiedades y reglas lógicas, partiendo de proposiciones ya demostradas, o de axiomas.

Por ejemplo en el caso del Teorema anterior, la demostración podría ser:

Demostración



Partimos de la hipótesis de que ABC *es un triángulo. Nombramos a sus ángulos interiores* $\hat{\alpha}$ *(en el vértice* A*),* $\hat{\beta}$ *(en el vértice* B*) y* $\hat{\gamma}$ *(en el vértice* C*).*

La gráfica es sólo orientativa. No se puede tener en cuenta para la demostración·

Prologamos el lado AB *y llamamos* a *a la recta que lo contiene. Trazamos la recta* b *paralela a* a *que pasa por el vértice* C*.*

Llamamos $\hat{\delta}$ *al ángulo que determinan el lado* AC *y la recta* b *consecutivo a* $\hat{\gamma}$*, y* $\hat{\epsilon}$ *al ángulo que determinan el lado* BC *y la recta* b *consecutivo a* $\hat{\gamma}$*.*

Esto lo podemos hacer en cualquier triángulo ABC (independientemente de que tenga las mismas características o no del de la figura).

Llamamos α *a la medida de* $\hat{\alpha}$*,* β *a la medida de* $\hat{\beta}$*,* γ *a la medida de* $\hat{\gamma}$*,* δ *a la medida de* $\hat{\delta}$ *y* ϵ *a la medida de* $\hat{\epsilon}$*.*

Por ser $\hat{\alpha}$ *y* $\hat{\delta}$ *alternos internos entre paralelas, podemos decir que* $\alpha = \delta$*. De la misma forma, por ser* $\hat{\beta}$ *y* $\hat{\epsilon}$ *alternos internos entre paralelas, podemos decir que* $\beta = \epsilon$*.*

Finalmente: $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \epsilon + \gamma = 180^{\circ}$

ya que $\hat{\delta} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$ *es un ángulo llano.*

Resulta entonces que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. ***Q.E.D.***[1]

[1] *Q.E.D.* es la sigla de una expresión latina que se suele encontrar al fina de una demostración: "Quod erat demonstrandum", que significa: "Lo que se quería demostrar".

Observación:

Con una definición establecemos las bases sobre las que enunciar los teoremas.

Por ejemplo, si definimos:

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos interiores recto,

luego podemos enunciar el **Teorema**:

Un triángulo es rectángulo si, y sólo si, la suma del cuadrado de sus catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa

Pero también podríamos haber definido:

Un triángulo rectángulo es aquel para el cual la suma del cuadrado de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercero,

y luego enunciar el **Teorema**:

Un triángulo es rectángulo si, y sólo si, uno de sus ángulos interiores es recto

Conjetura

Una **conjetura** es una afirmación que está basada en suposiciones o indicios, pero no ha sido demostrada. Si se logra demostrar, se convierte en un teorema.

Ejemplo

Todo número par mayor que dos puede escribirse como suma de dos números primos.

Esta afirmación fue propuesta por Goldbach (1742). Se han hecho cálculos con computadoras que muestran que es cierta para todos los números pares menores que 10^{18}. Sin embargo, no hay una demostración matemática que permita afirmar que se cumple para todos los números pares, de modo que sigue siendo una conjetura.

Corolario

Un **corolario** es un resultado que se deduce con facilidad de un teorema. Formalmente, es un teorema en sí mismo.

Ejemplo

En un triángulo rectángulo la longitud de un cateto es menor que la de la hipotenusa

es un corolario del Teorema de Pitágoras, que afirma que: “En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos”.

1.3. Práctica 1

1) Para cada uno de los siguientes teoremas delimitar cuáles son las hipótesis y cuál la tesis:

a) Si n es un número natural par, entonces $\frac{n}{2}$ es un número natural**.**

b) El resto de dividir un polinomio $p(x)$ por otro de la forma $(x-a)$ es $p(a)$.

c) Todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

d) La suma entre dos números negativos es negativa.

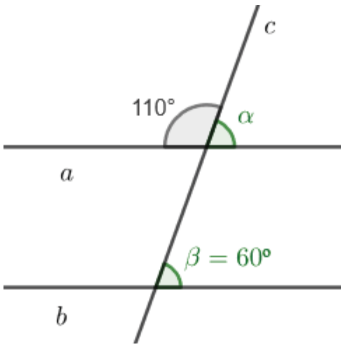
e) Dada una circunferencia de diámetro AC y centro O, consideramos sobre ella un punto B distinto de A y de C. Entonces, el triángulo ABC es un triángulo rectángulo donde la medida de $\hat{B}$ es 90°.

f) Un triángulo es rectángulo si y sólo si el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

g) Dos rectas cortadas por una transversal son paralelas si y sólo si los ángulos correspondientes son congruentes.

2)

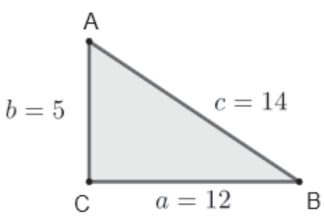
a)



¿Es $\alpha = \beta$?¿Esto contradice el teorema enunciado en el punto **1) k)**?¿Por qué?

b) Sean $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ y $q(x) = x^2 - 3$. ¿Es $p(3)$ el resto de la división entre p y q?¿Esto contradice el teorema del resto?¿Por qué?

c)



¿Es $c^2 = a^2 + b^2$?¿Esto contradice el teorema de Pitágoras?¿Por qué?

2. Proposiciones

Cuando hablamos de una **proposición** nos referimos a una oración o un enunciado sobre el cual tiene sentido decir que es Verdadero o Falso. Por ejemplo si decimos "*Hoy empieza el curso de ingreso*" es una proposición; en cambio: "*Vayan al primer piso*", o "*¿Sabés dónde está el baño*?" no son proposiciones.

Decimos que una proposición es **verdadera** si se verifica siempre. Por ejemplo si decimos: "*Los lados de un cuadrado tienen todos la misma longitud*", esto es cierto cualquiera sea el cuadrado que se tome. En cambio si decimos: "*Los números son positivos*", habrá números para los cuales eso se verifica y otros que no. Decimos entonces que la proposición es **falsa** (no es necesario que no se cumpla nunca; basta con que no se cumpla siempre). La lógica que utilizamos es dicotómica, es decir hay sólo dos posibilidades, y son antagónicas: si una proposición es verdadera no puede ser falsa, y viceversa.

2.1. Argumento

Un **argumento** es un razonamiento lógico que permite obtener conclusiones a partir de proposiciones.

Ejemplos

1) A partir de la proposición: “Es un día del fin de semana y no es domingo” se puede argumentar que: “los días del fin de semana son sábado y domingo”, y como se explicita que “no es domingo” se puede concluir que “es sábado”.

2) Sabemos que los números primos son aquellos números naturales que admiten *exactamente* dos divisores. Todos los números pares mayores que 2 admiten al menos tres divisores (1, 2 y el mismo número). Concluimos que los números pares mayores que 2 no son primos.

3) Como los triángulos isósceles tienen al menos dos de sus lados de igual longitud, y los triángulos equiláteros tienen sus tres lados de igual longitud, podemos concluir que todo triángulo equilátero es isósceles.

2.2. Práctica 2

1) Decidir si las siguientes son o no proposiciones

a) El Sol es una estrella

b) ¿Qué hora es?

c) Un triángulo es una figura geométrica de cuatro aristas

d) Si querés acercate

e) $3 + 2 = 5$

2) Dadas las siguientes proposiciones, establecer si son verdaderas o falsas, justificando tu respuesta

a) $\{x \in \mathbb{N} / 1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 3\}$

b) Los números primos son impares

c) Los números impares son primos

d) El valor absoluto de un número es siempre no negativo

e) Los números primos mayores que 2 son impares

f) Si $sen(\alpha) > 0$ entonces $\alpha \in I_c$

g) Si $\alpha \in I_c$ entonces $sen(\alpha) > 0$

3. Algunas operaciones con proposiciones

Así como definimos operaciones entre números (suma, producto, división...), entre conjuntos (unión, intersección), entre polinomios (suma, producto, división...) también es posible definir operaciones entre proposiciones.

En general notamos a las proposiciones con letras minúsculas: p, q, r...

3.1. Negación

La **negación** de una proposición es la que surge de afirmar que la misma no se cumple.

Si la proposición es p, su negación suele notarse como $\neg p$ (a veces también $-p$ ó $\sim p$)

Ejemplos:

a) La negación de "*El número 1 es primo*" es "*El número 1 no es primo*" (también podría decirse *"No es cierto que el número* 1 *sea primo"*)

b) La negación de: "*El conjunto* A *está contenido en el conjunto* B" (simbólicamente $A \subset B$) es "*El conjunto* A *no está contenido en el conjunto* B" (simbólicamente $A \not\subset B$); o también "*No es cierto que* $A \subset B$"

c) La negación de "*El seno del ángulo* α *es menor que* $\frac{1}{2}$" (simbólicamente $sen(\alpha) < \frac{1}{2}$) es "*El seno del ángulo* α *no es menor que* $\frac{1}{2}$" (simbólicamente $sen(\alpha) \not< \frac{1}{2}$). En este caso también es posible decir que la negación es: $sen(\alpha) \geq \frac{1}{2}$

Si una proposición es **Verdadera**, su negación es **Falsa** (y viceversa).

3.2. Conjunción y disyunción

Consideremos los significados de "**y**" y "**o**" que mencionamos en la primera sección.

Conjunción

Dadas las proposiciones p, q, la **conjunción** de ambas es otra proposición que se obtiene de expresar "p **y** q". Simbólicamente: $p \wedge q$.

Si p y q son ambas verdaderas, la conjunción es verdadera. Si una de las dos (o las dos) son falsas, la conjunción es falsa.

Ejemplos

1) $p =$ Hoy es lunes

$q =$ Está lloviendo en Rosario

$p \wedge q =$ Hoy es lunes y está lloviendo en Rosario.

Es verdadera sólo si p y q lo son.

2) Esta operación nos permite definir la intersección:

$x \in A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

Si las proposiciones $p = x \in A$, $q = x \in B$ son ambas verdaderas, se puede afirmar que $x \in A \cap B$

Disyunción

Dadas las proposiciones p y q, la **disyunción (ó disyunción incluyente)** de ambas es otra proposición que se obtiene de expresar "p **ó** q". Simbólicamente: $p \vee q$.

Si p y q son verdaderas, la disyunción es verdadera. Si una de las dos es verdadera y la otra falsa la disyunción sigue siendo verdadera. Si ambas son falsas, la disyunción es falsa.

Ejemplos

1) $p =$ Aumenta la luz.

$q =$ Aumenta el gas.

$p \vee q =$ Aumenta la luz o aumenta el gas.

Es verdadera si p es verdadera y q también.

También es verdadera si una de las dos lo es.

Es falsa si ambas son falsas.

2) Esta operación nos permite definir la unión:

$x \in A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$

Si alguna de las proposiciones $p = x \in A$, $q = x \in B$ es verdadera, se puede afirmar que $x \in A \cup B$

3.3. Implicación

Una implicación es una proposición donde hay un enunciado que conlleva a otro. Habíamos visto que el símbolo "$\Longrightarrow$" se lee “implica” en el sentido de “entonces”.

Ejemplos:

a_1**)** Mónica nació en Resistencia entonces es chaqueña.

b_1**)** Si la pintura es roja entonces es amarilla.

c_1**)** -3 es entero entonces es natural. Simbólicamente: $-3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3 \in \mathbb{N}$

d_1**)** Un triángulo es isósceles entonces es equilátero. Simbólicamente ABC isósceles $\Rightarrow$ ABC equilátero

e_1**)** Un polinomio $P\left(x\right)$ es divisible por $\left(x-\alpha\right) \Rightarrow P\left(\alpha\right)=0$

En tanto proposiciones, las implicaciones pueden ser **Verdaderas** o **Falsas**.

Analicemos los ejemplos anteriores:

a_1**)** Mónica nació en Resistencia entonces es chaqueña.

Esta proposición es **Verdadera**. Resistencia es una localidad de la provincia de Chaco.

b_1**)** Si la pintura es roja entonces es amarilla.

Esta proposición es **Falsa**. Asumimos que si algo es color rojo no puede ser simultáneamente de otro color.

c_1**)** -3 es entero entonces es natural. Simbólicamente: $-3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3 \in \mathbb{N}$

Esta proposición es **Falsa**. $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$ y por lo tanto que un elemento esté en $\mathbb{Z}$ no significa que está en $\mathbb{N}$

d_1**)** Un triángulo es isósceles entonces es equilátero. Simbólicamente ABC isósceles $\Rightarrow$ ABC equilátero.

Esta proposición es **Falsa**. Un triángulo isósceles tiene dos lados iguales; el tercero no necesariamente igual. Por lo tanto no necesariamente es equilátero.

e_1**)** Un polinomio $P\left(x\right)$ es divisible por $\left(x-\alpha\right) \Rightarrow P\left(\alpha\right)=0$

Esta proposición es **Verdadera** por el Teorema del Resto.

Si la proposición $p \Rightarrow q$ es verdadera, decimos que p es ***condición suficiente*** para q, o que q es ***condición necesaria*** para p

Ejemplo

Si un cuadrilátero es un cuadrado entonces tiene los cuatro lados iguales.

Decimos que es suficiente con que sea un cuadrado para que tenga los cuatro lados iguales. A la vez, es necesario que tenga los cuatro lados iguales para que sea un cuadrado.

Pero podemos ver que tener los cuatro lados iguales no es suficiente para que el cuadrilátero sea un cuadrado (¿Por qué?). Tampoco es necesario que sea un cuadrado para que tenga los cuatro lados iguales.

Simbólicamente en este caso:

$p=$ un cuadrilátero es un cuadrado

$q=$ el cuadrilátero tiene los cuatro lados iguales

$p \Rightarrow q$ es verdadera (y en este caso $q \Rightarrow p$ es falsa)

3.4. Implicación recíproca

Si p y q son proposiciones, la **implicación recíproca** de $p \Rightarrow q$ es $q \Rightarrow p$ (la condición necesaria pasa a ser suficiente, y viceversa)

Las implicaciones recíprocas de los ejemplos de la sección anterior son:

a_2**)** Mónica es chaqueña entonces nació en Resistencia.

b_2**)** Si la pintura es amarilla entonces es roja.

c_2**)** -3 es natural entonces es entero. Simbólicamente: $-3 \in \mathbb{N} \Rightarrow -3 \in \mathbb{Z}$

d_2**)** Un triángulo es equilátero entonces es isósceles. Simbólicamente ABC equilátero $\Rightarrow$ ABC isósceles

e_2**)** $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$

Analicemos el valor de verdad en estos casos:

a_2**)** Mónica es chaqueña entonces nació en Resistencia.

Esta proposición es **Falsa**. Mónica nació en la provincia de Chaco, pero no necesariamente en Resistencia.

b_2**)** Si la pintura es amarilla entonces es roja.

Esta proposición es **Falsa**. Asumimos que si algo es amarillo no puede ser simultáneamente de otro color.

c_2**)** -3 es natural entonces es entero. Simbólicamente: $-3 \in \mathbb{N} \Rightarrow -3 \in \mathbb{Z}$

Este es un caso extraño porque a priori es falso que $-3 \in \mathbb{N}$. Sin embargo, es **verdadero** que $-3 \in \mathbb{Z}$

d_2**)** Un triángulo es equilátero entonces es isósceles. Simbólicamente ABC equilátero $\Rightarrow$ ABC isósceles

Esta proposición es **Verdadera**. Si un triángulo es equilátero tiene los tres lados iguales, y por lo tanto tiene al menos dos lados iguales, lo que lo hace isósceles.

e_2**)** $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(x)$ es divisible por $(x - \alpha)$

Esta proposición es **Verdadera** porque el Teorema del Resto también permite afirmarlo.

Notemos que el valor de verdad de una implicación no condiciona el de su recíproca.

Comparando los ejemplos de la sección anterior con los de esta encontramos:

a) $p \Rightarrow q$ Verdadera y $q \Rightarrow p$ Falsa

b) $p \Rightarrow q$ Falsa y $q \Rightarrow p$ Falsa

c) $p \Rightarrow q$ Falsa y $q \Rightarrow p$ Verdadera

d) $p \Rightarrow q$ Falsa y $q \Rightarrow p$ Verdadera

e) $p \Rightarrow q$ Verdadera y $q \Rightarrow p$ Verdadera

Doble implicación

Si, como en e_1 y e_2 son verdaderas tanto $p \Rightarrow q$ como $q \Rightarrow p$ podemos escribir $p \Leftrightarrow q$ y lo leemos "p **sí, y sólo si** q".

Decimos que las proposiciones p y q son **equivalentes**.

Y que p es ***condición necesaria y suficiente*** para q (o, lo que es lo mismo, q es ***condición necesaria y suficiente*** para p)

3.5. Implicación contrarrecíproca

Si p y q son dos proposiciones, sus respectivas negaciones son $\neg p$ y $\neg q$. La implicación **contrarecíproca** de $p \Rightarrow q$ es $\neg q \Rightarrow \neg p$

Si una implicación es verdadera, su contrarrecíproca también lo es. Ambas proposiciones son equivalentes.

Veamos por ejemplo las proposiciones contrarrecíprocas de a_1 a e_1 y sus valores de verdad:

a_3**)** La implicación contrarrecíproca de "Mónica nació en Resistencia entonces es chaqueña" es "Mónica no es chaqueña entonces no nació en Resistencia".

La proposición es **Verdadera** (de la misma forma que la original). Si Mónica no es chaqueña no nació en ninguna localidad de la provincia de Chaco, por lo tanto no puede haber nacido en Resistencia.

b_3**)** La implicación contrarrecíproca de "Si la pintura es roja entonces es amarilla" es "Si la pintura no es amarilla entonces no es roja"

La proposición es **Falsa** (de la misma forma que la original). Que algo no sea amarillo no significa que no sea rojo.

c_3**)** La implicación contrarrecíproca de "$-3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3 \in \mathbb{N}$" es "$-3 \notin \mathbb{N} \Rightarrow -3 \notin \mathbb{Z}$"

La proposición es **Falsa** (de la misma forma que la original). Un número puede no estar en $\mathbb{N}$ pero sí estar en $\mathbb{Z}$ ya que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ en sentido estricto.

d_3**)** La implicación contrarrecíproca de "Un triángulo es isósceles entonces es equilátero" es "Un triángulo no es equilátero entonces no es isósceles".

La proposición es **Falsa** (de la misma forma que la original). Si un triángulo no es equilátero, sabemos que no tiene los tres lados iguales, pero podría tener dos iguales y el tercero no, es decir, podría ser isósceles.

e_3**)** La implicación contrarrecíproca de "Un polinomio $P(x)$ es divisible por $(x-\alpha) \Rightarrow P(\alpha)=0$" es "$P(\alpha) \neq 0 \Rightarrow P(x)$ no es divisible por $(x-\alpha)$"

La proposición es **Verdadera** (de la misma forma que la original). Si $P(\alpha) \neq 0$ podemos afirmar que $P(x)$ no es divisible por $(x-\alpha)$ (porque si lo fuera tendría que ocurrir que $P(\alpha)=0$).

Vemos que los valores de verdad de las proposiciones contrarrecíprocas coinciden con los de las proposiciones originales.

La idea de que la implicación contrarrecíproca es equivalente a la proposición original, induce un método de demostración que a veces puede resultar más sencillo. La idea es decir "Si no se cumpliera lo que estamos tratando de demostrar, necesariamente las hipótesis no se cumplirían".

Si tenemos que demostrar que $p \Rightarrow q$ podemos partir de suponer que vale $\neg q$ y probar que entonces se cumple $\neg p$.

Un ejemplo de esto es lo que hicimos para demostrar que "Todo número primo mayor que 2 es impar". Suponiendo que el número mayor que 2 no es impar, resulta par, y por lo tanto no puede ser primo.

Otro ejemplo:

x^2 es par $\Rightarrow x$ es par.

Suponemos que x no es par. Entonces se puede escribir $x = 2n+1, n \in \mathbb{N}_0$.

Su cuadrado es: $x^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 2n + 1 = 2(2n^2+n)+1$ impar, es decir x^2 no es par.

Demostramos que x no es par $\Rightarrow x^2$ no es par.

Por lo tanto queda demostrado que x^2 es par $\Rightarrow x$ es par.

3.6. Práctica 3

1) Dadas las siguientes proposiciones:

$p =$ "Catalina realiza el 60% de los ejercicios"
$q =$ "Catalina aprueba el examen"

a) Escribir en forma simbólica:
i) Catalina realiza el 60% de los ejercicios y aprueba el examen
ii) Catalina realiza el 60% de los ejercicios o no aprueba el examen
iii) Si Catalina realiza el 60% de los ejercicios entonces aprueba el examen
iv) No es cierto que Catalina realiza el 60% de los ejercicios y no aprueba el examen

b) Escribir en lenguaje coloquial
i) $p \vee q$
ii) $\neg p \wedge q$
iii) $\neg(p \Rightarrow q)$
iv) $\neg(p \Rightarrow \neg q)$

c) Negar las proposiciones obtenidas en **a)** y escribirlas en lenguaje coloquial

2) Indicar en qué casos p es condición necesaria para q, p es condición suficiente para q o p es condición necesaria y suficiente para q

a) $p =$"Los triángulos ABC y DEF son congruentes"
$q =$"Los triángulos ABC y DEF tienen ángulos respectivamente iguales"

b) $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$
$p =$"$a = c$"
$q =$"$a^2 = b$ y $c^2 = b$"

c) $p =$"ABC es un triángulo rectángulo"
$q =$"ABC tiene un lado cuyo cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos"

d) $p =$"$xy > 4$"
$q =$"$x > 2$ y $y > 2$"

4. Cuantificadores

Un **cuantificador** es una expresión que indica la cantidad de veces que se satisface una propiedad.

4.1. Cuantificadores universales y existenciales

Cuantificador universal

El **cuantificador universal** se utiliza para afirmar que todos los elementos de un conjunto cumplen con una determinada propiedad. Se nota con el símbolo $\forall$ y se lee “para todo” (ó "para cada" ó "cualquiera sea"). Podemos decir que resume conjunciones. La proposición será verdadera si lo es en todos los casos.

Ejemplos

1) $x+5=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La proposición es **Falsa**. Sólo se cumple si $x=-5$, pero basta tomar $x=3$ para mostrar que no se cumple.

2) $x+(-x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La proposición es **Verdadera**, ya que se cumple en todos los casos (todo número real tiene opuesto).

3) $A \subset B \Rightarrow x \in B \quad \forall x \in A$

La proposición es **Verdadera**: cualquiera sea el elemento de A que tomemos, estará en B

4) $|x+y| \leq |x|+|y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

La proposición es **Verdadera** pues se cumple para cualquier par de números reales x e y

5) La suma de los cuadrados de dos de los lados de ABC es igual al cuadrado del tercer lado $\forall$ triángulo ABC.

La proposición es **Falsa** pues sólo se cumple si el triángulo es rectángulo.

Cuantificador existencial

El **cuantificador existencial** se usa para indicar que hay al menos un elemento en un conjunto que cumple una determinada propiedad. Se nota con el símbolo $\exists$ y se lee “existe” (o "existe al menos"). Podemos decir que resume disyunciones. La proposición será verdadera si lo es en algún caso.

Ejemplos

1) $\exists\, x \in \mathbb{R} / x+5=0$

La proposición es **Verdadera** ya que existe $x=-5$ que la cumple.

2) $\exists\, x \in \mathbb{R} / x+(-x)=0$

La proposición es **Verdadera**, pues al cumplirse en todos los casos está garantizado que existe al menos un caso en que se cumple.

3) $A \subset B \Rightarrow \exists\, x \in B / x \in A$ siendo $A \neq \emptyset$

La proposición es **Verdadera**: si bien puede haber elementos de B que no estén en A, existe al menos un elemento de B que está en A.

4) $\exists\, x \in \mathbb{R} / \, |x+y| > |x|+|y|$

La proposición es **Falsa** pues no hay ningún número real que la cumpla.

5) $\exists$ triángulo ABC tal que la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercer lado .

La proposición es **Verdadera** pues existe al menos un triángulo rectángulo.

Cuantificador de existencia única

El **cuantificador de existencia única** se usa para indicar que hay un único elemento del conjunto que cumple una determinada propiedad. Se nota con el símbolo $\exists!$ y se lee “existe un único”.

Los cuantificadores se pueden combinar en una misma proposición.

Ejemplos

1) $\exists!\ x \in \mathbb{R}/x + 5 = 0$

La proposición es **Verdadera** ya que para cada número real, el opuesto es único (en este caso es $x = -5$)

2) $\forall x \in \mathbb{R} \exists!\ x \in \mathbb{R}/x + (-x) = 0$

La proposición es **Verdadera**, pues afirma que para cada $x \in \mathbb{R}$ existe el opuesto y es único.

3) $\forall A \neq \emptyset, A \subset B \Rightarrow \exists!\ x \in B/x \in A$

La proposición es **Falsa** pues a priori puede haber más de un elemento en B que también esté en A.

4) $\forall x \in \mathbb{R} \exists!\ y \in \mathbb{R}/\ |x + y| > |x| + |y|$

La proposición es **Falsa** pues de hecho no hay ningún par de números reales que la cumpla.

5) $\exists!$ triángulo ABC tal que la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del tercer lado.

La proposición es **Falsa** pues puede haber más de un triángulo rectángulo.

4.2. Negación de cuantificadores

Negación del cuantificador universal

Si queremos negar una proposición que afirma que algo vale en todos los casos, basta con decir que existe un caso en que no se cumple. Por lo tanto:

$$\neg\left(\forall x, p\left(x\right)\right) = \exists x / \neg p\left(x\right)$$

Ejemplo

Negar la proposición "Para todo par de números enteros resulta su suma igual a cero"

es afirmar que: "Existe un par de números enteros tales que su suma no es cero"

Simbólicamente:

$\neg\left(\forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 0\right) = \exists x, y \in \mathbb{Z} / x + y \neq 0$

Negación del cuantificador existencial

Recíprocamente, negar que existe un caso donde se cumple una propiedad es afirmar que no se cumple en ningún caso (o sea que para todo caso, no se cumple):

$$\neg\left(\exists x / p\left(x\right)\right) = \forall x, \neg p\left(x\right)$$

También puede expresarse:

$$\nexists x / p\left(x\right) = \forall x, \neg p\left(x\right)$$

Ejemplo

Negar la proposición:

$\exists x \in \mathbb{R} / x^2 + 2 = 0$
es afirmar que:
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2 \neq 0$

Como vimos anteriormente, si una proposición es Verdadera su negación es Falsa, y viceversa.

Esto nos permite, por ejemplo, justificar una decisión de si una proposición es Verdadera o Falsa.

Ejemplos

1) La proposición: "Todos los números primos son impares" ($\forall p \in \mathbb{N}, p\, primo \Rightarrow p = 2n + 1, n \in \mathbb{N}$) es **Falsa** porque su negación: "Existe un número primo que no es impar" ($\exists p \in \mathbb{N}, p\, primo \Rightarrow p = 2n, n \in \mathbb{N}$) es **Verdadera** (existe $x = 2$ que la cumple).

2) La proposición "Existe un triángulo para el que la suma de los ángulos interiores es 190°" es **Falsa** porque su negación: "Para todo triángulo la suma de los ángulos interiores no es 190°" es **Verdadera**.

4.3. Práctica 4

1) Dadas las siguientes proposiciones, expresarlas simbólicamente empleando cuantificadores. Negarlas y traducirl esta negación al lenguaje corriente:

a) Todos los números divisibles por 4 son pares.
b) Existen paralelogramos que son rectángulos.
c) Todos los números racionales son reales.

2) Agregar los cuantificadores que se consideren necesarios para que resulte una proposición verdadera en cada caso:

a) $x^2 - 25 = (x - 5).(x + 5)$
b) ABC es rectángulo
c) $\cos\alpha \leq 1$
d) $x^2 + 4 = 0$
e) $x > 5 \ impar$
f) $\emptyset \subset A$

3) Siendo las proposiciones: $p =$" $n \ es \ primo$ " ; $q =$" $n \ es \ par$ " y $r =$" $n > 2$ " , expresar en lenguaje coloquial:
a) $\exists \ n \in Z / p \wedge q$
b) $\forall \ n \in Z, r \Rightarrow p \vee q$
c) $\exists \ n \in Z / p \wedge (q \vee r)$
d) $\forall \ n \in Z, (p \wedge r) \Rightarrow \neg q$

5. Transitividad

Dada una relación entre dos elementos de un conjunto, decimos que la misma es **transitiva** si cuando a está relacionado con b y b está relacionado con c resulta a relacionado con c.

Ejemplos

1) La relación de igualdad entre dos números es transitiva:

Si $x = y$ e $y = z$ entonces $x = z$

2) La relación "ser el doble de" no es transitiva:

a es el doble de b y b es el doble de c no implica que a es el doble de c

3) La relación de orden entre dos números es transitiva:

Si $x \leq y$ e $y \leq z$ entonces $x \leq z$

4) La implicación entre proposiciones es transitiva:

Si $p \Rightarrow q$ y $q \Rightarrow r$ entonces $p \Rightarrow r$

5.1. Práctica 5

1) Decidir si cada una de las siguientes relaciones es o no transitiva

a) es múltiplo de
b) es el padre de
c) es mayor que
d) es un subconjunto de
e) no es un subconjunto de
f) es el cuadrado de

2) Utilizar la transitividad - si se verifica - para completar los siguientes enunciados:

a) El material A está a mayor temperatura que el material B y el material B está a mayor temperatura que el material C entonces...........
b) x es un número mayor que 5 y .... entonces x es mayor que 2
c) Si .... y obtener una nota mayor que 6 implica aprobar el examen, entonces resolver correctamente más de 3 ejercicios implica aprobar el examen.
d) Si 5 es la mitad de 10 y 10 es la mitad de 20 entonces............................
e) Si dos de los ángulos interiores del triángulo ABC son complementarios y .... entonces ABC es rectángulo.

6. Respuestas

A continuación se presentan las respuestas y algunas resoluciones de los ejercicios correspondientes a cada práctica del capítulo.

6.1. Práctica 1

1)

a) Hipótesis: n es un número natural par; **tesis:** $\frac{n}{2}$ es un número natural.

b) Hipótesis: $p(x)$ y $(x-a)$ polinomios; **tesis:** el resto de dividir $p(x)$ por $(x-a)$ es $p(a)$.

c) Hipótesis: ABC es un triángulo; **tesis:** todo ángulo exterior del triángulo ABC es igual a la suma de los dos ángulos interiores no adyacentes a él.

d) Hipótesis: x e y son números reales negativos; **tesis:** la suma entre x e y es negativa.

e) Hipótesis: c es una circunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y centro O, y B es un punto sobre c distinto de A y de C; **tesis:** el triángulo ABC es un triángulo rectángulo donde $\widehat{B} = 90^\circ$

f) Hipótesis: ABC es un triángulo rectángulo; **tesis:** el cuadrado de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos. A la vez: **Hipótesis:** en un triángulo ABC el cuadrado del lado de mayor longitud es igual a la suma de las longitudes de sus otros dos lados; **tesis:** ABC es un triángulo rectángulo.

g) Hipótesis: a y b son dos rectas paralelas cortadas por una transversal c; **tesis:** los ángulos correspondientes, por ellas determinados, son congruentes. A la vez: **Hipótesis:** los ángulos correspondientes determinados por dos rectas a y b cortadas por una transversal c son congruentes; **tesis:** las rectas a y b son paralelas.

2)

a) $\alpha = 70º \neq 60º = \beta$. No contradice el teorema enunciado en el punto 1) k) puesto que no se cumple la hipótesis de dicho teorema que las rectas a y b sean paralelas.

b) $p(3) = 11$ y el resto de la división entre p y q es $r(x) = 2x - 1$ por lo que $p(3) \neq r(x)$. No contradice el teorema del resto puesto que no se cumple la hipótesis de que el polinomio divisor sea de la forma $x - a$ con $a \in \mathbb{R}$.

c) $c^2 = 196 \neq 144 + 25 = a^2 + b^2$. No contradice el teorema de Pitágoras puesto que no se cumple la hipótesis de que el triángulo sea un triángulo rectánculo en $\widehat{C}$.

6.2. Práctica 2

1)

a) Es una proposición
b) No es una proposición
c) Es una proposición
d) No es una proposición
e) Es una proposición

2)

a) La proposición es **falsa**. $\{x \in \mathbb{N}/1 < x < 3\} = \{2\}$, mientras que $\{x \in \mathbb{R}/1 < x < 3\} = (1,3)$. Podemos decir que $\frac{3}{2} \in \{x \in \mathbb{R}/1 < x < 3\}$ pero $\frac{3}{2} \notin \{x \in \mathbb{N}/1 < x < 3\}$, con lo cual los conjuntos no son iguales.

b) La proposición es **falsa**. Basta mostrar que 2 es primo y no es impar.

c) La proposición es **falsa**. Basta mostrar por ejemplo que 9 es impar y no es primo.

d) La proposición es **verdadera**. Por definición de valor absoluto, si $a \geq 0$ resulta $|a| = a \geq 0$ y si $a < 0$ resulta $|a| = -a > 0$

e) La proposición es **verdadera**. Los números mayores que 2 que no son impares son pares, y por lo tanto tienen al menos tres divisores (1, 2 y el mismo número). Por lo tanto si son primos deben ser impares.

f) La proposición es **falsa**. Por ejemplo, si consideramos $\alpha = 135º$ tenemos que $sen(135º) > 0$ pero $135º \in II_c$

g) La proposición es **verdadera**. Si $\alpha \in I_c$, la ordenada del punto de intersección de su lado final será positiva y, en consecuencia, $sen(\alpha) > 0$

6.3. Práctica 3

1)
a)

i) $p \wedge q$
ii) $p \vee -q$
iii) $p \Rightarrow q$
iv) $-(p \wedge -q)$

b)

i) Catalina realiza el 60% de los ejercicios o aprueba el examen
ii) Catalina no realiza el 60% de los ejercicios y aprueba el examen
iii) No es cierto que si Catalina realiza el 60% de los ejercicios entonces aprueba el examen
iv) No es cierto que si Catalina realiza el 60% de los ejercicios entonces no aprueba el examen

c)

i) $-(p \wedge q)$: No es cierto que Catalina realiza el 60% de los ejercicios y aprueba el examen
ii)$-(p \vee -q)$: No es cierto que Catalina realiza el 60% de los ejercicios o no aprueba el examen
iii) $-(p \Rightarrow q)$: No es cierto que si Catalina realiza el 60% de los ejercicios entonces aprueba el examen
iv) $p \wedge -q$: Catalina realiza el 60% de los ejercicios y no aprueba el examen

2)

a) p es condición suficiente para q
b)p es condición suficiente para q
c) p es condición necesaria y suficiente para q
d) p es condición necesaria para q

6.4. Práctica 4

1)

a) $\forall\, x/x = 4n(n \in \mathbb{N}), x$ es par
$\exists\, x/x = 4n(n \in \mathbb{N}), x$ no es par.
Existe al menos un número divisible por 4 que no es par.

b) $\exists\, ABCD$ paralelogramo $/ABCD$ rectángulo
$\forall\, ABCD$ paralelogramo $/ABCD$ no es rectángulo
Ningún paralelogramo es un rectángulo.

c) $\forall\, x \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{R}$
$\exists\, x \in \mathbb{Q}/x \notin \mathbb{R}$
Existe un racional que no es real.

2)

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 - 25 = (x-5).(x+5)$
b) $\exists\, ABC$ triángulo rectángulo
c) $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \cos\alpha \leq 1$
d) $\forall\, x \in \mathbb{R} - \left(x^2 + 4 = 0\right)$, ó bien:
$\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 \neq 0,$ ó
$\nexists\, x \in \mathbb{R}/x^2 + 4 = 0$
e) $\exists\, x > 5/x\ impar$
f) $\forall\, conjunto\ A, \emptyset \subset A$

3)

a) Existe un entero que es primo y es par
b) Para todo número entero se cumple que, si es mayor que 2, es primo o es par.
c) Existe un entero que es primo y es par o es mayor que dos.
d) Para todo entero se cumple que si es primo y mayor que 2 entonces no es par.

6.5. Práctica 5

1)

a) es transitiva
b) no es transitiva
c) es transitiva
d) es transitiva
e) no es transitiva
f) no es transitiva

2)

a) El material A está a mayor temperatura que el material B y el material B está a mayor temperatura que el material C entonces el material A está a mayor temperatura que el material C.
b) x es un número mayor que 5 y 5 es mayor que 2 entonces x es mayor que 2
c) Si resolver correctamente más de 3 ejercicios implica obtener una nota mayor que 6 y obtener una nota mayor que 6 implica aprobar el examen, entonces resolver correctamente más de 3 ejercicios implica aprobar el examen.
d) No es transitiva
e) Si dos de los ángulos interiores de un triángulo ABC son complementarios y tener dos ángulos complementarios implica que el tercer ángulo es recto entonces ABC es rectángulo.

Práctica Integradora

1) Analizar la veracidad o falsedad de cada enunciado. Justificar adecuadamente:

a) $\left|\dfrac{-2x+6}{-3}\right| = 4 \Rightarrow |x| = 3$

b) $(2xy - z)\cdot(3xy + 7z) = 6x^2y^2 - 7z^2$

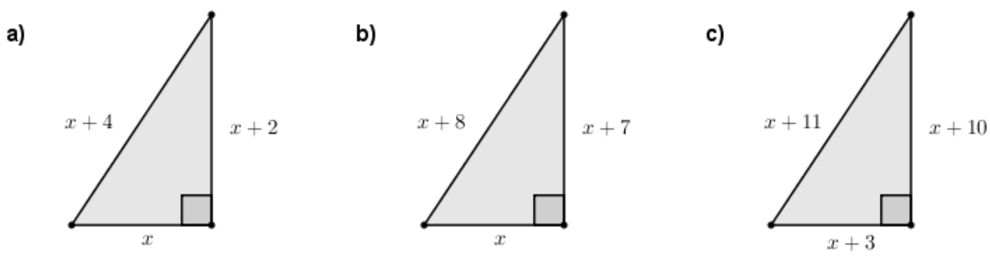
c) $\forall\, n \in \mathbb{N}:\ 2^{-n}\cdot(2^{n+1} - 5\cdot 2^n) = -3$

d) $\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}} = 2$

e) $(x + \sqrt{3})^2 = x^2 + 3$

f) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot(x-1)}{\sqrt{x+1}} = x - \sqrt{x}$

2) Hallar el valor de x en cada caso:



3) a) Demostrar la identidad $cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$.

b) Usando la identidad anterior, determinar el valor de $cos(120^{\circ})$

4) La pirámide de Keops es la más antigua y también la más alta de las tres pirámides de Guiza, Egipto. Se trata de una pirámide recta de base cuadrada que actualmente tiene una altura de $13,8\ dam$ y una arista lateral de $2,19\ hm$.

a) ¿Cuál es su volumen en m^3?

b) ¿Cuál es su área lateral en m^2?

5) En un experimento, se ha impuesto una dieta estricta a un grupo de animales. Cada uno de ellos recibe, entre otros nutrientes, 20 gramos de proteína y 6 gramos de carbohidraros. El científico a cargo sólo tiene dos mezclas de alimento, cada una con la composición que se detalla en la siguiente tabla.

Mezcla	**Proteína (%)**	**Carbohidratos (%)**
A	8	4
B	12	2

¿Cuántos gramos de cada mezcla debe usar para obtener la dieta correcta para cada animal?

6) Si el área de un rectángulo es $\dfrac{x^2+9x+18}{x+1}$ y su largo es $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+2x+1}$, obtener su ancho en función de x.

7) Una pecera en forma de paralelepípedo recto tiene $92\ cm$ de largo, $75\ cm$ de ancho y $56\ cm$ de alto. ¿Cuántos cm^3 de agua caben en la pecera?

Si llenamos la pecera hasta la mitad y echamos a los peces, el nivel aumenta en $2\ cm$. ¿Qué volumen ocupan los peces?

8) Siendo x un ángulo del I_c o del II_c, resolver la ecuación: $6\cdot cos^2(x) + cos(2x) = 1$

9)

a) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo cuyos lados miden $11\ cm$, $60\ cm$ y $61\ cm$?

b) ¿Cuánto miden los ángulos de un triángulo cuyos lados miden $3\ cm$, $5\ cm$ y $7\ cm$?

10)

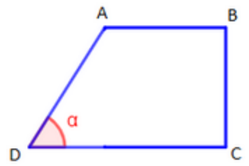
a) El producto de dos números naturales consecutivos es 462. Plantear y resolver una ecuación que permita hallar dichos números.

b) La suma de tres números naturales consecutivos es 195. Plantear y resolver una ecuación que permita dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuáles son los números?

c) La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Plantear y resolver una ecuación que permita hallar dichos números.

11) Calcular el perímetro y el área del trapecio rectángulo ABCD, sabiendo que:

- $\alpha = 58^o$
- $AB = BC$
- $AD = 24,6\ m$



12)

a) Verificar la siguiente identidad trigonométrica:

$$(1 + tg^2 x) \cdot (1 - sen^2 x) = 1$$

b) Sabiendo que $cos(x) = -\dfrac{1}{4}$ y $x \in II_c$, hallar en forma exacta $sen(2x)$, $ctg(x)$ y $sec(-x)$.

13) Hallar el polinomio $p(x)$ que verifique la siguiente igualdad, indicando las restricciones de la variable:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{p(x)}{x^2 - 4}$$

14)

a) Hallar el o los valores de k para que la ecuación $x^2 + 3x + k = 0$ tenga dos soluciones reales distintas.

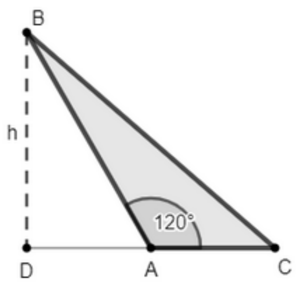
b) Hallar el o los valores de k para que la ecuación $(k+1).\,x^2 + 2x + 2 = 0$ no tenga soluciones reales.

15) En cada caso, hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación y representarlo gráficamente.

a) $\dfrac{x+2}{6} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x-3}{18}$

b) $\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2x^2-1}{2} \leq 3 - x^2$

16) Considerar el triángulo que se muestra en la figura y los datos indicados a su derecha:



$AD = 2\ cm$

$AC = x$

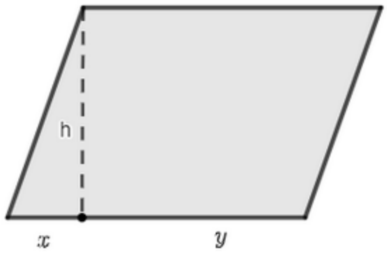
$AB = 2 \cdot AC$

a) Calcular las longitudes de cada uno de los lados del triángulo ABC.

b) Calcular, en forma exacta, el área total y el volumen del prisma recto de $10\ cm$ de altura que tiene por base al triángulo ABC.

17) Considerar el paralelogramo que se muestra en la figura y del que se sabe que:

- el pie de la altura h divide a la base en dos segmentos, x e y, de modo que x es la tercera parte de dicha base;
- la longitud de cada uno de los lados no paralelos a la base es igual a la longitud del segmento y;
- su perímetro es de $25\ cm$.



a) Plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales 2x2 que permita encontrar la medida de cada uno de los lados del paralelogramo.

b) Calcular, en forma exacta, el área del paralelogramo.

18) Considerar los intervalos reales $A = (-\infty; 2]$, $B = [-3; 5)$ y $C = (2; 4]$:

a) Escribir al conjunto A por comprensión.

b) Escribir por extensión el conjunto $\{x/x \in \mathbb{Z} \wedge x \in B\}$

c) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

i) $A \cap C = \{2\}$ **ii)** $C \subset B$

Resolución Práctica Integradora

1)

a) Falso.

$|x| = 3$ no es una condición necesaria para que $\left|\dfrac{-2x+6}{-3}\right| = 4$ puesto que, para $x = 9$, se cumple que $\left|\dfrac{-2\cdot 9+6}{-3}\right| = 4$ pero $|9| = 9 \neq 3$.

b) Falso.

Esta igualdad no se cumple $\forall x, y, x \in \mathbb{R}$ pues existen $x = y = z = 1$ tal que:

$(2xy - z)\cdot(3xy + 7z) = (2-1)\cdot(3+7) = 10 \neq -1 = 6\cdot 1^2\cdot 1^2 - 7\cdot 1^2 = 6x^2y^2 - 7z^2$

c) Verdadero.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ resulta:

$2^{-n}\cdot(2^{n+1} - 5\cdot 2^n) =$

$= 2^{-n}\cdot 2^{n+1} - 5\cdot 2^{-n}\cdot 2^n =$

$= 2^{-n+n+1} - 5\cdot 2^{-n+n} =$

$= 2^1 - 5\cdot 2^0 =$

$= 2 - 5 =$

$= -3$

d) Verdadero.

$\sqrt{\sqrt{10}+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{\sqrt{10}-\sqrt{6}} =$

$= \sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{6})\cdot(\sqrt{10}-\sqrt{6})} =$

$= \sqrt{(\sqrt{10}^2 - \sqrt{6}^2)} =$

$= \sqrt{(10-6)} =$

$= \sqrt{4} = 2$

e) Falso.

Esta igualdad no se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$ pues existe $x = -\sqrt{3}$ tal que:

$(-\sqrt{3}+\sqrt{3})^2 = 0 \neq 6 = (-\sqrt{3})^2 + 3$

f) Falso. Esta igualdad no se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$ pues existe $x = 4$ tal que:

$$\frac{\sqrt{4}\cdot(4-1)}{\sqrt{4+1}} = \frac{2\cdot 3}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \neq 2 = 4 - \sqrt{4}$$

2) En cada caso, el triángulo es rectángulo por lo que puede aplicarse el Teorema de Pitágoras:

a)

$(x+4)^2 = (x+2)^2 + x^2$

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4 + x^2$

$x^2 + 8x + 16 = 2x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = -2 \; o \; x_2 = 6$$

Por tratarse de la medida de los lados de un triángulo, se descarta la solución $x_1 = -2$. Resulta entonces $x = 6$

b)

$(x+8)^2 = (x+7)^2 + x^2$

$x^2 + 16x + 64 = x^2 + 14x + 49 + x^2$

$x^2 + 16x + 64 = 2x^2 + 14x + 49$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = -3 \; o \; x_2 = 5$$

Por tratarse de la medida de los lados de un triángulo, se descarta la solución $x_1 = -3$. Resulta entonces $x = 5$

c)

$(x+11)^2 = (x+10)^2 + (x+3)^2$

$x^2 + 22x + 121 = x^2 + 20x + 100 + x^2 + 6x + 9$

$x^2 + 22x + 121 = 2x^2 + 26x + 109$

$x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2} \Rightarrow x_1 = -6 \; o \; x_2 = 2$$

Por tratarse de la medida de los lados de un triángulo, se descarta la solución $x_1 = -6$. Resulta entonces $x = 2$

3)

a) $cos(2\alpha) =$

$= cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) =$

$= cos^2(\alpha) - (1 - cos^2(\alpha)) =$

$= cos^2(\alpha) - 1 + cos^2(\alpha) =$

$= 2cos^2(\alpha) - 1$

b) $cos(120°) = cos(2 \cdot 60°) = 2cos^2(60°) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\therefore cos(120°) = -\frac{1}{2}$

4)

a)

$altura = 13,8 \; dam = 138 \; m$

$arista \; lateral = 2,19 \; hm = 219 \; m$

Sea d la medida de la diagonal del cuadrado, base de la pirámide:

$d = 2 \cdot \sqrt{(219 \; m)^2 - (138 \; m)^2}$

Como todo cuadrado es rombo:

$$área \; cuadrado = \frac{d^2}{2} = 2 \cdot [(219 \; m)^2 - (138 \; m)^2] = 57834 \; m^2$$

$$volumen = \frac{1}{3} \cdot \; área \; base \cdot \; altura$$

$$volumen = \frac{1}{3} \cdot \ (57834\ m^2) \cdot \ (138\ m) = 2660364\ m^3$$

$$volumen = 2660364\ m^3$$

b) Siendo l la medida del lado del cuadrado de la base:

$$área\ cuadrado = l^2 = 57834\ m^2 \Rightarrow l = 9\sqrt{714}\ m$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, calculamos la apotema a de la cara lateral:

$$a = \sqrt{(219\ m)^2 - (\frac{9\sqrt{714}}{2}\ m)^2} = \sqrt{\frac{67005}{2}}\ m$$

$$área\ lateral = 4 \cdot \ área\ triángulo$$

$$área\ lateral = 4 \cdot \ \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot a\right)$$

$$área\ lateral = 4 \cdot \ \left(\frac{1}{2} \cdot (9\sqrt{714}\ m) \cdot (\sqrt{\frac{67005}{2}}\ m)\right) = 18\sqrt{23920785}\ m^2$$

$$área\ lateral = 18\sqrt{23920785}\ m^2 \approx 88035,98m^2$$

$$área\ lateral \approx 88035,98m^2$$

5)

Incógnitas: a cantidad de alimento mezcla A, b cantidad de alimento mezcla B

Cantidad total de proteínas a suministrar: $\frac{8}{100} \cdot a + \frac{12}{100} \cdot b$

Cantidad total de carbohidratos a suministrar: $\frac{4}{100} \cdot a + \frac{2}{100} \cdot b$

El sistema de ecuaciones será:

$$\begin{cases} \frac{8}{100} \cdot a + \frac{12}{100} \cdot b = 20 \\ \frac{4}{100} \cdot a + \frac{2}{100} \cdot b = 6 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando, por ejemplo, el método de reducción:

$$\begin{array}{rcl} \frac{8}{100} \cdot a + \frac{12}{100} \cdot b & = & 20 \\ - & & \\ \frac{8}{100} \cdot a + \frac{4}{100} \cdot b & = & 12 \\ \hline \frac{8}{100} \cdot b & = & 8 \end{array}$$

Luego: $b = 100$ y, sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales, $a = 100$

Se deben suministrar $100\ g$ de cada mezcla de alimento.

6)

$$área\ rectángulo = ancho\ \cdot\ largo$$

$$\frac{x^2 + 9x + 18}{x + 1} = ancho\ \cdot\ \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{x^2 + 9x + 18}{x + 1} \div \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x + 1} = ancho$$

$$\frac{(x+3)(x+6)}{x+1} \div \frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)^2} = ancho \quad x \neq \pm 1; x \neq -3$$

$$\frac{(x+3)(x+6)}{x+1} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x+3)} = ancho \quad x \neq -1; x \neq -3$$

$x + 6 = ancho \quad x \geq -6; x \neq -1; x \neq -3$

7)

$volumen\ pecera = 92\ cm \cdot 75\ cm \cdot 56\ cm$

$volumen\ pecera = 386400\ cm^3$

$volumen\ peces = 92\ cm \cdot 75\ cm \cdot 2\ cm$

$volumen\ peces = 13800\ cm^3$

8)

$6 \cdot cos^2(x) + cos(2x) = 1$

$6 \cdot cos^2(x) + cos^2(x) - sen^2(x) = 1$

$7 \cdot cos^2(x) - sen^2(x) = 1$

$7 \cdot cos^2(x) - (1 - cos^2(x)) = 1$

$7 \cdot cos^2(x) - 1 + cos^2(x)) = 1$

$8 \cdot cos^2(x) = 2$

$cos^2(x) = \frac{1}{4}$

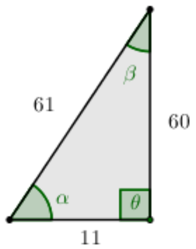
$cos(x) = \pm\frac{1}{2}$

Siendo x un ángulo del I_c o del II_c, se tiene que: $x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{2\pi}{3}$

9)

a) Se trata de un triángulo rectángulo puesto que se verifica que:

$$61^2 = 3721 = 3600 + 121 = 60^2 + 11^2$$



$sen(\alpha) = \frac{60}{61} \Rightarrow \alpha = arcsen(\frac{60}{61}) = 79^o\ 36'\ 40,11''$

$sen(\beta) = \frac{11}{61} \Rightarrow \beta = arcsen(\frac{11}{61}) = 10^o\ 23'\ 19,89''$

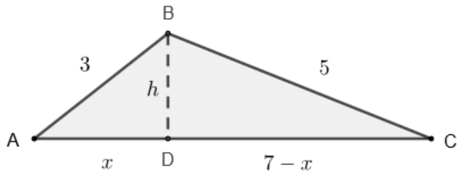
Luego:

$\theta = 90^o$

$\alpha = 79^o\ 36'\ 40,11''$

$\beta = 10^o\ 23'\ 19,89''$

b)



El triángulo ABC no es rectángulo puesto que $7^2 \neq 3^2 + 5^2$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos ABD y DBC, se tiene que:

$$\begin{cases} h^2 + (7-x)^2 = 25 \\ h^2 + x^2 = 9 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando, por ejemplo, el método de reducción:

$$\begin{array}{rrcl} & h^2 + (7-x)^2 & = & 25 \\ - & & & \\ & h^2 + x^2 & = & 9 \\ \hline & (7-x)^2 - x^2 & = & 16 \end{array}$$

$(7-x)^2 - x^2 = 16$

$49 - 14x + x^2 - x^2 = 16$

$49 - 16 = 14x$

$33 = 14x$

$\dfrac{33}{14} = x$

$$cos(\widehat{A}) = \frac{\frac{33}{14}}{3} \Rightarrow \widehat{A} = arccos\left(\frac{\frac{33}{14}}{3}\right) \approx 38^{\text{o}}\ 12'\ 48''$$

$$cos(\widehat{C}) = \frac{\frac{65}{14}}{5} \Rightarrow \widehat{C} = arccos\left(\frac{\frac{65}{14}}{5}\right) \approx 21^{\text{o}}\ 47'\ 12''$$

Por suma de los ángulos interiores del $\triangle ABC$:
$\widehat{B} \approx 180^{\text{o}} - (38^{\text{o}}\ 12'\ 48'' + 21^{\text{o}}\ 47'\ 12'') = 120^{\text{o}}$

Luego:
$\widehat{A} \approx 38^{\text{o}}\ 12'\ 48''$
$\widehat{B} \approx 120^{\text{o}}$
$\widehat{C} \approx 21^{\text{o}}\ 47'\ 12''$

10)

a)

$n \cdot (n+1) = 462$

$n^2 + n - 462 = 0$

$n = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 1848}}{2}$

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1849}}{2}$$

$$n = \frac{-1 \pm 43}{2}$$

$n_1 = 21$ o $n_2 = -22$

Notar que n_2 no es solución del problema puesto que $n_2 = -22 \notin \mathbb{N}$. En consecuencia, los números son: $21; 22$

b)

$n + (n+1) + (n+2) = 195$

$3n + 3 = 195$

$3n = 192$

$n = 64$

Los números son: $64; 65; 66$

c)

$n^2 + (n+1)^2 = 181$

$n^2 + n^2 + 2n + 1 - 181 = 0$

$2n^2 + 2n - 180 = 0$

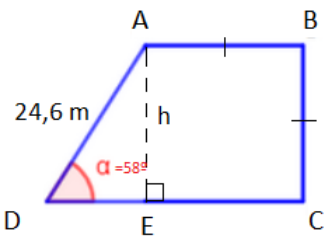
$$n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 1440}}{4}$$

$$n = \frac{-2 \pm 38}{4}$$

$n_1 = 9$ o $n_2 = -10$

Notar que n_2 no es solución del problema puesto que $n_2 = -10 \notin \mathbb{N}$. En consecuencia, los números son: $9; 10$

11)



$$sen(58^o) = \frac{h}{24,6} \Rightarrow h \approx 20,86\ m$$

Luego: $AB = BC = h \approx 20,86\ m$

$$cos(58^o) = \frac{DE}{24,6} \Rightarrow DE \approx 13\ m$$

Luego: $CD = DE + EC \approx (13 + 20,86)\ m = 33,86\ m$

$$perímetro\ ABCD = AB + BC + CD + AD \approx (20,86 + 20,86 + 33,86 + 24,6)\ m = 100,18\ m$$

$$área\ ABCD = \frac{(AB + CD) \cdot h}{2} \approx \frac{(20,86\ m + 33,86\ m) \cdot 20,86\ m}{2} = 570,73\ m^2$$

$perímetro\ ABCD \approx 100,18\ m$

$$área\ ABCD \approx 570,73\ m^2$$

12)

a)

$$(1+tg^2(x))\cdot(1-sen^2(x)) =_{(1)(2)}$$

$$= \left(1+\frac{sen^2(x)}{cos^2(x)}\right)\cdot cos^2(x) =$$

$$= \left(\frac{cos^2(x)+sen^2(x)}{cos^2(x)}\right)\cdot cos^2(x) =_{(2)}$$

$$= \left(\frac{1}{cos^2(x)}\right)\cdot cos^2(x) = 1$$

(1) Definición de tangente

(2) Identidad pitagórica

b)

Por identidad pitágorica:

$$cos^2(x)+sen^2(x)=1$$

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + sen^2(x) = 1 \quad \text{por (1)}$$

$$\frac{1}{16}+sen^2(x)=1$$

$$sen^2(x) = 1-\frac{1}{16}$$

$$sen^2(x) = \frac{15}{16}$$

$$sen(x) = \sqrt{\frac{15}{16}} \quad \text{por (2)}$$

$$sen(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

(1) $cos(x) = -\frac{1}{4}$

(2) $x \in II_c \Rightarrow sen(x) > 0$

$$sen(2x) = 2\cdot sen(x)\cdot cos(x) = 2\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$ctg(x) = \frac{1}{tg(x)} = \frac{cos(x)}{sen(x)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

$$sec(-x) = \frac{1}{cos(-x)} = \frac{1}{cos(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

Luego:

$$sen(2x) = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$ctg(x) = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

$sec(-x) = -4$

13)

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{p(x)}{x^2-4}$$

Factorizamos los polinomios:

$$x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$$

$$x^3+4x^2+x-6 = (x-1)(x+2)(x+3)$$

$$x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$\frac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+x-6} = \frac{p(x)}{x^2-4} \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 2; -2; -3\}$$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+2)(x+3)} \cdot (x-2)(x+2) = p(x)$$

$$p(x) = x-2 \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{1; 2; -2; -3\}$$

14)

a)

$x^2+3x+k=0$ tiene dos soluciones reales distintas $\Leftrightarrow \Delta = b^2-4ac > 0$

Siendo $a=1,\ b=3,\ c=k$:

$$3^2 - 4\cdot 1\cdot k > 0$$

$$9 - 4\cdot k > 0$$

$$9 > 4\cdot k$$

$$\frac{9}{4} > k$$

b)

$(k+1).\,x^2+2x+2=0$ no tiene soluciones reales $\Leftrightarrow \Delta = b^2-4ac < 0$

Siendo $a=k+1,\ b=2,\ c=2$:

$$2^2 - 4\cdot(k+1)\cdot 2 < 0$$

$$4 - 8\cdot(k+1) < 0$$

$$4 < 8\cdot(k+1)$$

$$\frac{1}{2} < k+1$$

$$\frac{1}{2} - 1 < k$$

$$-\frac{1}{2} < k$$

15)

a)

$$\frac{x+2}{6} - \frac{1}{3} \leq \frac{x-3}{18}$$

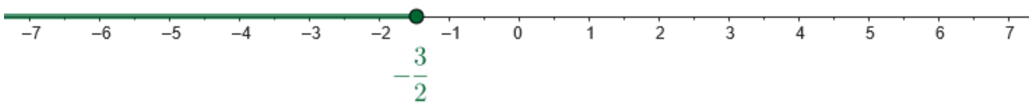
$$\frac{3x+6}{18} - \frac{6}{18} \leq \frac{x-3}{18}$$

$$3x+6-6 \leq x-3$$

$3x - x \leq -3$

$2x \leq -3$

$x \leq -\dfrac{3}{2}$



b)

$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{2x^2-1}{2} \leq 3 - x^2$

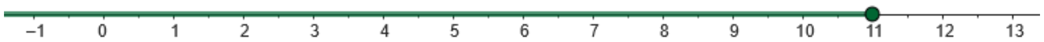
$\dfrac{x-1}{4} - \dfrac{4x^2-2}{4} \leq 3 - x^2$

$x - 1 - (4x^2 - 2) \leq 12 - 4x^2$

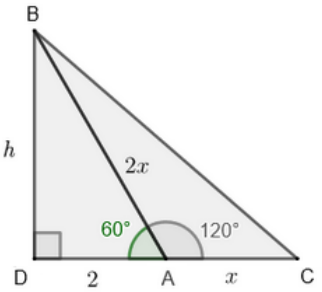
$x + 1 - 4x^2 \leq 12 - 4x^2$

$x + 1 \leq 12$

$x \leq 11$



16)



a)

En el triángulo rectángulo ADB:

$tg(60^o)) = \dfrac{h}{2} \Rightarrow h = 2 \cdot tg(60^o) = 2\sqrt{3}\ cm$

$(2x)^2 = h^2 + AD^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow x = 2\ cm$

En el triángulo rectángulo BDC:

$BC^2 = h^2 + CD^2 = (2\sqrt{3})^2 + 4^2 = 12 + 16 = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}\ cm$

Luego:

$AB = 4\ cm$, $AC = 2\ cm$, $BC = 2\sqrt{7}\ cm$

b)

$\text{área}\ total = 2 \cdot \text{área}\ \triangle ABC + \text{área}\ lateral$

$$área\ total = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h + perímetro \triangle ABC \cdot altura\ prisma$$

$$área\ total = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\ cm \cdot (2\sqrt{3})\ cm + (4 + 2 + 2\sqrt{7})\ cm \cdot 10\ cm$$

$$área\ total = (4\sqrt{3} + 60 + 20\sqrt{7})\ cm^2$$

$$volumen\ prisma = área\ \triangle ABC \cdot\ altura\ prisma$$

$$volumen\ prisma = \frac{1}{2} \cdot 2\ cm \cdot (2\sqrt{3})\ cm \cdot\ 10\ cm$$

$$volumen\ prisma = 20\sqrt{3}\ cm^3$$

17)

a)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(x + y) \\ 2(x + 2y) = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = y \\ 2x + 4y = 25 \end{cases}$$

Lo resolvemos utilizando, por ejemplo, el método de reducción:

$$\begin{array}{rrcr} & 2x - y & = & 0 \\ - & & & \\ & 2x + 4y & = & 25 \\ \hline & -5y & = & -25 \end{array}$$

Luego: $y = 5\ cm$ y, sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones originales, $x = 2,5\ cm$

Los lados del paralelogramos miden $5\ cm$ y $2,5\ cm$.

b) Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$(5\ cm)^2 = h^2 + (2,5\ cm)^2$$

$$(5\ cm)^2 - (2,5\ cm)^2 = h^2$$

$$(5\ cm)^2 - (\frac{5}{2}\ cm)^2 = h^2$$

$$25\ cm^2 - \frac{25}{4}\ cm^2 = h^2$$

$$h = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm$$

$$área\ paralelogramo = 7,5\ cm \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm$$

$$área\ paralelogramo = \frac{15}{2}\ cm \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm$$

$$área\ paralelogramo = \frac{75\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

18)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$

b) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

c)

i) Falso. $2 \in A$ pero $2 \notin C$, por definición de la operación intersección entre conjuntos, $2 \notin A \cap C$. Luego: $A \cap C \neq \{2\}$

ii) Verdadero. Para probar que C es un subconjunto de B debemos mostrar que todo elemento de C es también un elemento de B.

Sea $x \in C \Rightarrow 2 < x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 2 < x \leq 4 < 5 \Rightarrow -3 \leq x < 5 \Rightarrow x \in B \Rightarrow C \subset B$.

Algunos Símbolos Matemáticos

$\neq$ **distinto**	$\emptyset$ **conjunto vacío**
$<$ **menor**	$\cup$ **unión**
$>$ **mayor**	$\cap$ **intersección**
$\leq$ **menor o igual**	∞ **infinito**
$\geq$ **mayor o igual**	$\forall$ **para todo**
$/$ **tal que**	$\exists$ **existe**
$\in$ **pertenece**	$\nexists$ **no existe**
$\notin$ **no pertenece**	$\Rightarrow$ **implica o entonces**
$\subset$ **subconjunto, contenido o incluido**	$\Leftrightarrow$ **si y sólo si**
$\supset$ **contiene o incluye**	$\parallel$ **paralelos**
$\not\subset$ **no subconjunto, no contenido o no incluido**	$\nparallel$ **no paralelos**
$\not\supset$ **no contiene o no incluye**	$\perp$ **perpendicular**
$\wedge$ **y**	$\not\perp$ **no perpendicular**
$\vee$ **o**	$\therefore$ **por lo tanto**

Facultad de
Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura

FCEIA

UNR

Universidad
Nacional
de Rosario

**Facultad de Ciencias Exactas,
Ingeniería y Agrimensura**

Av. Carlos Pellegrini 250. 2000 Rosario

(0341) 4802649 / 4802650 / 4802652 int. 270

ingreso@fceia.unr.edu.ar www.fceia.unr.edu.ar

fceia.unr FCEIAUNR