

Resumen

El yoyo es habitualmente utilizado, como ejemplo cotidiano, para el cálculo del momento de inercia en las clases de Física I. Sin embargo, el tiempo ha pasado y ¿quién tiene hoy en día un yoyo en su casa? Ciertamente el yoyo ha dejado de ser popular... y cotidiano. Pero, afortunadamente, ha aparecido un sucesor: el spinner. En este trabajo proponemos incorporar al spinner como ejemplo de cuerpo rígido en movimiento rotacional. Mostramos cómo podemos, por un lado, medir de manera indirecta su momento de inercia, y por otro, calcularlo en forma aproximada. Creemos que las discusiones que pueden abrirse en el aula a partir de este trabajo, en el que se conjuga lo experimental con lo teórico, no sólo pueden resultar provechosas para la aprehensión del concepto de momento de inercia por parte de los alumnos, sino también para formar el criterio necesario para realizar cálculos aproximados por medio de la simplificación del modelo. De esta forma, utilizamos al juguete que se ha colado en nuestras vidas y atrapado nuestra atención como aliado en la enseñanza de la Física.

Introducción

Los spinners, básicamente, son cuerpos rígidos que pueden girar sobre su eje central. A fin de minimizar el rozamiento y poder girar mayor tiempo, son montados sobre rulemanes. El spinner maximiza la relación entre su momento de inercia y su masa, por lo que en general concentra su masa en los extremos. Por ello, usualmente en cada uno de sus brazos cuentan con una pieza de acero que generalmente tiene forma de anillo o arandela, cuya densidad es significativamente mayor a la del cuerpo de plástico. Los spinners pueden tener distintos números de brazos, aunque los más comunes tienen tres, que por balanceo están separados 120° .

Primera parte: Medición del momento de inercia del spinner

Péndulo Físico

Un cuerpo rígido que es colgado de un punto cualquiera O estará en su posición de equilibrio cuando su centro de masa cm quede situado sobre la línea vertical que pasa por O , por debajo de dicho punto. Si dicho cuerpo se desplaza de su posición de equilibrio un ángulo θ , las fuerzas P (peso) y P' (del vínculo) forman un par que ejercen sobre el cuerpo un torque

$$\tau = -m g l_{cm} \sin \theta$$

lo que provocará sobre el cuerpo una aceleración angular

$$\alpha = \tau / I$$

Reemplazando en llegamos a la ecuación de movimiento

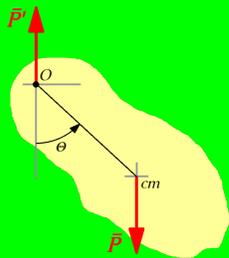
$$\ddot{\theta} + \frac{m g l_{cm}}{I} \sin \theta = 0$$

que para pequeñas oscilaciones puede ser aproximada por

$$\ddot{\theta} + \frac{m g l_{cm}}{I} \theta = 0$$

La ecuación es la ecuación del oscilador armónico, cuyas soluciones son funciones armónicas de período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{m g l_{cm}}}$$



Momento de inercia de un spinner sujeto a una varilla

Fijemos el spinner a una varilla ligera, con su centro a una distancia l de una de los extremos, de la forma mostrada en la figura. Consideremos el movimiento rotacional respecto al punto O situado en dicho extremo. El momento de inercia del conjunto respecto a O será

$$I_T = I_v + I_s + m_s l^2$$

donde I_v es el momento de inercia de la varilla respecto a O , I_s es el momento de inercia del spinner respecto a su centro, y m_s es la masa del spinner. El último se obtiene del teorema de Steiner al hacer rotar al spinner respecto a O .

El momento de inercia I_v de la varilla respecto a O es

$$I_v = \frac{m_v l_v^2}{3}$$

Luego, sustrayendo I_v del I_T medido, podemos obtener I_s .

Medición indirecta del momento de inercia del conjunto

Entonces, a partir de las mediciones de las masas del spinner y de la varilla, de las longitudes de la varilla y del spinner respecto a O , y del período de oscilación, podemos calcular I_T .

$$I_T = \frac{m_T g l_{cm} T^2}{4\pi^2}$$

donde $m_T = m_s + m_v$ y $l_{cm} = (m_s l + 0.5 m_v l_v) / m_T$.

Desarrollo experimental

A la Derecha se muestran los resultados obtenidos para un spinner clásico montado sobre un palito de brochet. La masa del spinner es 52 g, y la del palito 1.5 g. La longitud del palito es 24 cm. Se montó al spinner a siete longitudes diferentes, y para cada caso se tomaron 3 mediciones que luego fueron promediadas.

Resultados de las mediciones

l [cm]	T [s]	I_T [10^{-4} kg m^2]	I_s [10^{-5} kg m^2]
8.3	0.590	4.20	2.85
9.6	0.638	5.62	4.48
11.3	0.681	7.46	3.69
13.1	0.734	9.96	5.03
14.6	0.766	12.0	3.27
17.0	0.830	16.3	5.42
19.4	0.882	21.0	4.39

Resultado experimental

Podemos concluir que el momento de inercia del spinner es:

$$I_s = (4 \pm 1) 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Segunda parte: Estimamos el momento de inercia del spinner

Una primera aproximación

El primer modelo que podemos plantear para calcular el momento de inercia del spinner es el de tres masas puntuales de masa $m/3$, cada una distancia l del eje de rotación O . En este modelo simple, el momento de inercia del spinner es

$$I_s^{(1)} = 3 \cdot \frac{m}{3} \cdot l^2 = m l^2$$

Para el spinner utilizado, $m=54$ g y $l=26$ mm, por lo que resulta

$$I_s^{(1)} = 3.65 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Mejoramos el cálculo aproximado

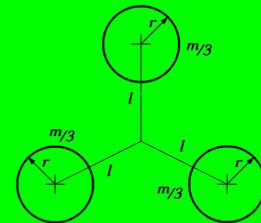
¿Cuán buena es la aproximación antes calculada? ¿Puede ser mejorada? La respuesta a la segunda pregunta es sí. Consideremos ahora a las masas de los brazos del spinner no como masa puntuales, sino como anillos de radio r . El momento de inercia de cada anillo será $m/3 r^2$, y el momento de inercia del spinner será:

$$I_s^{(2)} = 3 \cdot \frac{m}{3} \cdot r^2 + 3 \cdot \frac{m}{3} \cdot l^2 = m r^2 + I_s^{(1)}$$

Podemos ver que al considerar que las masas tienen forma anular, se agrega un nuevo término a la primera estimación. Para el spinner utilizado, $m = 54$ g y $r = 9$ mm, por lo que resulta

$$I_s^{(2)} = 3.65 10^{-5} \text{ kg m}^2 + 0.44 10^{-5} \text{ kg m}^2 = 4.09 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

que es apenas un 12 % mayor a $I_s^{(1)}$. Por otro lado, considerando incertezas de 2 g para el peso y 1 mm para l y r , tenemos que el error propagado para $I_s^{(2)}$ es del 9.4 %.



¿Tiene sentido buscar una mejor aproximación?

Considerando que el peso de las siguientes será menor que el de la anterior, junto con el valor del error experimental con el que queremos comparar, no tiene sentido.

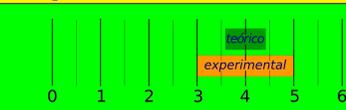
Resultado teórico

Entonces, el momento de inercia del spinner será:

$$I_s = (4.1 \pm 0.4) 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

Comparación de resultados y conclusiones

Comparación entre los resultados teórico y experimental



En el gráfico de la izquierda se muestran los resultados teórico y experimental con sus respectivos errores estimados. Se puede ver que ambos resultados son compatibles.

Conclusiones

- Proponemos un trabajo teórico y práctico de mecánica del cuerpo rígido.
- En dicho trabajo se explora el concepto de péndulo físico.
- A partir la ecuación del período del péndulo físico, se propone un método para la medición indirecta del momento de inercia de un spinner que puede ser implementado en el laboratorio.
- Además se discuten modelos simples de la distribución de masa del spinner que permiten estimar teóricamente su momento de inercia.
- Dado que en el trabajo se obtiene el momento de inercia del spinner por dos caminos, permite indagar los conceptos de medición, cálculo teórico, modelos aproximados y errores estimados.
- Por otro lado, como se analiza un objeto que el alumno ve cotidianamente, el trabajo, además de formativo, seguramente logrará despertar su interés.